Med@TICE
Université Joseph Fourier Grenoble 1
ETUDES DE SANTÉ
Première Année Commune

www.medatice-grenoble.fr

UE4 : Evaluation des méthodes d'analyses appliquées aux sciences de la vie et de la santé – Analyse

Fascicule d'exercices

Christelle MELODELIMA

Année universitaire 2011/2012

Sommaire des exercices

Sommaire des exercices

1. Logarithmes et exponentielles
2. Dérivées et différentielles - Fonction d'une variable
3. Etude de fonctions
4. Dérivées et différentielles - Fonction de plusieurs variables
5. Exercices complémentaires

Sommaire des exercices

Sommaire des exercices

Sommaire des exercices

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 1 :

Calculer $\log_3 10$, $\log_5 27$, $\log_{11} 2$, $\log_\pi 15$.

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 1 : Correction

$$\log_3(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(3)} = 2{,}0959$$

Rappel :

$$\boxed{\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}}$$

$$\log_5(27) = \frac{\ln(27)}{\ln(5)} = 2{,}0478$$

$$\log_{11}(2) = \frac{\ln(2)}{\ln(11)} = 0{,}2891$$

$$\log_\pi(15) = \frac{\ln(15)}{\ln(\pi)} = 2{,}3657$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 2 :

- Quel est le logarithme de 81 dans la base 3 ?
- Quel est le logarithme de 16 dans la base 2 ?
- Quel est le nombre dont le logarithme est -2 dans la base 4?

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 2 : Correction

- Quel est le logarithme de 81 dans la base 3 ?

$$x = \log_3(81) = \frac{\ln(81)}{\ln(3)} = \frac{\ln(3^4)}{\ln(3)} = \frac{4 \times \ln(3)}{\ln(3)} = 4$$

- Quel est le logarithme de 16 dans la base 2 ?

$$y = \log_2(16) = \frac{\ln(16)}{\ln(2)} = \frac{\ln(2^4)}{\ln(2)} = \frac{4 \times \ln(2)}{\ln(2)} = 4$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 2 : Correction

- Quel est le nombre dont le logarithme est -2 dans la base 4?

$$\log_4(z) = -2 \quad \Leftrightarrow \frac{\ln(z)}{\ln(4)} = -2 \quad \Leftrightarrow \ln(z) = -2\ln(4)$$

$$\Leftrightarrow z = e^{-2\ln(4)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = 4^{-2} = \frac{1}{16}}$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 3 :

Démontrer les deux égalités suivantes

$$\log_2 7.\log_3 7 + \log_3 7.\log_5 7 + \log_2 7.\log_5 7 = \frac{\log_2 7.\log_3 7.\log_5 7}{\log_{30} 7}$$

$$\log_{a^n}(x) = \frac{1}{n}\log_a(x)$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 3 : Correction

$$\log_2 7.\log_3 7 + \log_3 7.\log_5 7 + \log_2 7.\log_5 7$$

$$= \log_2 7.\log_3 7.\log_5 7\left[\frac{1}{\log_5 7} + \frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_3 7}\right]$$

$$= \log_2 7.\log_3 7.\log_5 7\left[\frac{\ln(5)}{\ln(7)} + \frac{\ln(2)}{\ln(7)} + \frac{\ln(3)}{\ln(7)}\right]$$

$$= \log_2 7.\log_3 7.\log_5 7\left[\frac{\ln(5)+\ln(2)+\ln(3)}{\ln(7)}\right]$$

Rappel :

$\mathrm{Log}_a(b)=\ln(b)/\ln(a)$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 3 : Correction

$$\log_2 7.\log_3 7 + \log_3 7.\log_5 7 + \log_2 7.\log_5 7$$

$$= \log_2 7.\log_3 7.\log_5 7\left[\frac{1}{\log_5 7} + \frac{1}{\log_2 7} + \frac{1}{\log_3 7}\right]$$

$$= \log_2 7.\log_3 7.\log_5 7\left[\frac{\ln(5)}{\ln(7)} + \frac{\ln(2)}{\ln(7)} + \frac{\ln(3)}{\ln(7)}\right]$$

$$= \log_2 7.\log_3 7.\log_5 7\left[\frac{\ln(5)+\ln(2)+\ln(3)}{\ln(7)}\right]$$

$$= \boxed{\frac{\log_2 7.\log_3 7.\log_5 7}{\log_{30} 7}}$$

Rappel :

Ln(a)+ln(b)=ln(a*b)

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 3 : Correction

$$\log_{a^n}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a^n)}$$

$$= \frac{\ln(x)}{n \times \ln(a)}$$

$$= \boxed{\frac{1}{n}\log_a(x)}$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 4 :

Résoudre des équations définies sur $\Re$ par :

(1) $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln 18$

(2) $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$

(3) $9^x + 3^x - 12 = 0$

(4) $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 4 : Correction

RAPPEL

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \left(a \neq 0 \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \right)$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$\Delta < 0$ pas de racine réelle

$\Delta = 0$ une racine double $x = \dfrac{-b}{2a}$

$\Delta > 0$ deux racines $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 4 : Correction

(1) $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln(18)$

Domaine de définition : $\begin{cases} x+1>0 \\ x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>\ \ 2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x \in \left]2;+\infty\right[$

Résolution de l'équation : $\ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln(18)$

$$\Leftrightarrow \ln\left((x+1)(x-2)\right) = \ln(18)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 18$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 20 = 0$$

$\Delta = 1 + 4 \times 20 = 81 = 9^2$ $\quad \boxed{x_1 = \dfrac{1+9}{2} = 5} \quad x_2 = \dfrac{1-9}{2} = -4$ impossible

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 4 : Correction

(2) $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$

Domaine de définition : $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in R - \{-1, 0\}$

Résolution de l'équation : $\ln|x(x+1)| = 0 = \ln(1) \quad \Leftrightarrow |\underbrace{x(x+1)}_{+ \text{ ou } -}| = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = 1 \\ -x(x+1) = 1 \end{cases}$$

$a) \quad x^2 + x - 1 = 0 \qquad \Delta = 1 + 4 = 5$

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0{,}618$$

$$x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} = -1{,}618$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 4 : Correction

(2) $\ln|x| + \ln|x+1| = 0$

$b)$ $x^2 + x + 1 = 0$ $\Delta = 1 - 4 = -3$ pas de racines réelles

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{2 solutions qui sont : } x_1 = 0{,}618 \text{ et } x_2 = -1{,}618}$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 4 : Correction

(3) $9^x + 3^x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x - 12 = 0$ on pose $X = 3^x$ $X > 0$

$\Leftrightarrow X^2 + X - 12 = 0$

$\Delta = 1 + 4 \times 12 = 49 = 7^2$

$X_1 = \dfrac{-1+7}{2} = 3$ $X_2 = \dfrac{-1-7}{2} = -4$

$X = 3^x$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 4 : Correction

(3) $9^x + 3^x - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 3^{2x} + 3^x - 12 = 0$ on pose $X = 3^x$ $X > 0$

$\Leftrightarrow X^2 + X - 12 = 0$

$\Delta = 1 + 4 \times 12 = 49 = 7^2$

$X_1 = \dfrac{-1+7}{2} = 3$ $X_2 = \dfrac{-1-7}{2} = -4$

$X = 3^x \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x=1$

impossible

$\boxed{\text{Solution unique } x = 1}$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 4 : Correction

$$\textbf{(4)}\quad x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^{x} \qquad x > 0$$

$$\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln\left(\sqrt{x}\right)} \qquad \Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x) \qquad \Leftrightarrow \left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)\ln(x) = 0$$

$$\ln(\sqrt{x}) = \ln\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

$e^{a} = e^{b} \Rightarrow a = b$ car exponentielle strcitement monotone

$$\Rightarrow \begin{cases} \ln(x) = 0 \\ \sqrt{x} - \dfrac{x}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \dfrac{x^2}{4} \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Solution possible } x = 1 \text{ et } x = 4}$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 5 :

Résoudre le système suivant dans $\Re$

$$\begin{cases} 4\left(\log_x y + \log_y x\right) = 17 \\ xy = 243 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \mathbf{x > y > 1}$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 5 : Correction

$$\begin{cases} 4\left(\log_x y + \log_y x\right) = 17 \\ xy = 243 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \mathbf{x > y > 1}$$

On sait que $\log_x(y) \cdot \log_y(x) = 1$ donc $\log_x(y) = \dfrac{1}{\log_y(x)}$

On pose $\log_y(x) = X \Rightarrow \log_x(y) = \dfrac{1}{X}$

$$4\left(\log_x(y) + \log_y(x)\right) = 17 \Leftrightarrow 4\left(X + \frac{1}{X}\right) = 17$$

$$4\left(X + \frac{1}{X}\right) = 17 \Leftrightarrow 4\left(\frac{X^2+1}{X}\right) = 17$$

$$\Leftrightarrow 4X^2 + 4 = 17X$$

$$\Leftrightarrow 4X^2 + 17X + 4 = 0$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 5 : Correction

$$4X^2 - 17X + 4 = 0$$

$$\Delta = 17^2 - 4 \times 4 \times 4 = 15^2 \qquad X_{1,2} = \frac{17 \pm 15}{8} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = \dfrac{1}{4} \\ X_2 = 4 \rightarrow \text{car x > y} \end{cases}$$

$$\log_y(x) = 4 \Leftrightarrow x = y^4 \qquad \log_x(y) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^{1/4} = y$$

Le système à résoudre s'écrit : $\begin{cases} x = y^4 \\ xy = 243 \end{cases} \Rightarrow y^5 = 243 = 3^5$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = 3 \\ x = 3^4 = 81 \end{array}}$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 6 :

Résoudre les systèmes suivants dans $\Re$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2^x = 3^y \end{cases}$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 6 : Correction

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln(2) \end{cases}$$

Domaine de définition : $x > 0$ et $y > 0$

Résolution de l'équation :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ \dfrac{x}{y} = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 4y^2 + y^2 = 5y^2 = 12 \end{cases}$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 6 : Correction

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ \ln(x) - \ln(y) = \ln(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{12}{5} \qquad y = \pm 2\sqrt{\frac{3}{5}} \qquad x = \pm 4\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Solution :

$$\boxed{\begin{cases} x = 3{,}1 \\ y = 1{,}55 \end{cases}}$$

I. Logarithmes et exponentielles

Exercice 6 : Correction

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2^x = 3^y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x\ln(2) = y\ln(3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x\ln(2) = (1-x)\ln(3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(\ln(2)+\ln(3)) = \ln(3) \\ x\ln(2\times 3) = \ln(3) \\ x\ln(6) = \ln(3) \\ x = \dfrac{\ln(3)}{\ln(6)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ x = \dfrac{\ln(3)}{\ln(6)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{\ln(3)}{\ln(6)} \\ x = \dfrac{\ln(3)}{\ln(6)} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y=\dfrac{\ln(2)}{\ln(6)} \\ x = \dfrac{\ln(3)}{\ln(6)} \end{cases}}$$

Sommaire des exercices

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 1 : Calculer les dérivées premières des expressions suivantes

$$y_1 = \left[\frac{x}{x^2-1}\right]^{\frac{3}{2}} \qquad y_2 = \frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1} \qquad y_3 = \left[\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right] \qquad y_4 = \sin^5 x$$

$$y_5 = \sin(x^5) \qquad y_6 = \cos^4(2x^2+5x) \qquad y_7 = \tan(\sqrt{x}) \qquad y_8 = \cot^3(x^4)$$

$$y_9 = \arcsin 3x \arccos 2x \qquad y_{10} = \arctan(\sin x) \qquad y_{11} = \arccos\frac{1}{x} \qquad y_{12} = \frac{\ln x}{x}$$

$$y_{13} = \ln(\tan\frac{x}{2}) \qquad y_{14} = \ln\left[\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right] \qquad y_{15} = \log_3 \sqrt{3x^3+x^2+2} \qquad y_{16} = e^{\cos(\sqrt{x})}$$

$$y_{17} = e^{\sqrt{x^2+1}} \qquad y_{18} = 2^{-1/x} \qquad y_{19} = \sin(x^x) \qquad y_{20} = (\sin x)^{\cos x}$$

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 1 : Correction

$$y_1' = -\frac{3}{2}\ \frac{\sqrt{x}\,(x^2+1)}{(x^2-1)^{5/2}}$$

$$y_2' = \frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}.(2x+1)^2}$$

$$y_3' = \frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$$

$$y_4' = 5\ (\sin x)^4 (\cos x) = 5\ \sin^4 x\ \cos x$$

$$y_5' = 5x^4 \cos(x^5)$$

$$y_6' = -4.(4x+5).\cos^3(2x^2+5x).\sin(2x^2+5x)$$

$$y_7' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+\tan^2\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}\ \cos^2\sqrt{x}}$$

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 1 : Correction

$$y'_8 = -\frac{12\,x^3}{\sin^2(x^4)}.\cot^2(x^4) = -12\,x^3\,\frac{\cos^2(x^4)}{\sin^4(x^4)}$$

$$y'_9 = \frac{3\ \arccos 2x}{\sqrt{1-9x^2}} - \frac{2\ \arcsin 3x}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$y'_{10} = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

$$y'_{11} = \frac{1}{x^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{x^2-1}} = \frac{1}{|x|\ \sqrt{x^2-1}}$$

$$y'_{12} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$y'_{13} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}$$

$$y'_{14} = \frac{2\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{2}{\cos x}$$

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d’une variable

Exercice 1 : Correction

$$y'_{15} = \frac{1}{2\ln 3} \cdot \frac{9x^2 + 2x}{3x^3 + x^2 + 2}$$

$$y'_{16} = e^u . u' = -\frac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} \quad e^{\cos\sqrt{x}}$$

$$y'_{17} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} . e^{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y'_{18} = \frac{\ln 2}{x^2} e^{-(\ln 2/x)} = \frac{\ln 2}{x^2} . 2^{-1/x}$$

$$y'_{19} = (1 + \ln x) . x^x . \cos(x^x)$$

$$y'_{20} = \left[-\sin x . \ln(\sin x) + \cot x . \cos x\right] . (\sin x)^{\cos x}$$

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d’une variable

Exercice 2:

Calculer la dérivée logarithmique et la différentielle logarithmique des fonctions suivantes puis en déduire la dérivée et la différentielle :

$$y_1 = x^k e^{nx} \sin^m x \text{ (k, n, m constantes)}$$

$$y_2 = \frac{x^3\sqrt{1+\ln x}}{(1+x)^4}$$

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 2 - Correction : Rappels

DERIVEE LOGARITHMIQUE

$$\boxed{\left[\ln\left|f(x)\right|\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)}}$$

DIFFERENTIELLE LOGARITHMIQUE

$$\boxed{d\left[\ln\left|f(x)\right|\right] = \left[\ln\left|f(x)\right|\right]'.dx = \frac{f'(x).dx}{f(x)} = \frac{df}{f}}$$

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 2 - Correction

$$\boxed{y_1 = x^k e^{nx} \sin^m x} \qquad (x \neq 0)$$

- **Dérivée logarithmique**

$$\boxed{\left[\ln\left|y(x)\right|\right]' = \left[\ln\left|f(x)\right|\right]' + \left[\ln\left|g(x)\right|\right]'}$$

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{k}{x} + n + m\frac{\cos x}{\sin x} = \frac{k}{x} + n + m\cot x$$

- **Différentielle logarithmique**

$$\boxed{d\left[\ln\left|y(x)\right|\right] = d\left[\ln\left|f(x)\right|\right] + d\left[\ln\left|g(x)\right|\right]}$$

$$\frac{dy_1}{y_1} = k\frac{dx}{x} + n\,dx + m\frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \left[\frac{k}{x} + n + m\cot x\right] dx$$

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 2 - Correction

- **Dérivée**

$$y_1' = y_1\left[\frac{k}{x} + n + m\cot x\right] = (x^k \mathrm{e}^{\mathrm{nx}} \sin^{\mathrm{m}} \mathrm{x}) \left[\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{x}} + n + m\cot x\right]$$

- **Différentielle**

$$dy_1 = y_1\left[\frac{k}{x} + n + m\cot x\right] dx \quad = (x^k \mathrm{e}^{\mathrm{nx}} \sin^{\mathrm{m}} \mathrm{x}) \left[\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{x}} + n + m\cot x\right] dx$$

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 2 - Correction

$$\boxed{y_2 = \frac{x^3\ \sqrt{1+\ln x}}{(1+x)^4}} \qquad x>0$$

- **Dérivée logarithmique**

$$\boxed{\left[\ln\left|y(x)\right|\right]' = \left[\ln\left|f(x)\right|\right]' - \left[\ln\left|g(x)\right|\right]'}$$

$$\frac{y_2'}{y_2} = 3.\frac{1}{x} + \frac{1}{2}.\frac{1}{x(1+\ln x)} - 4.\frac{1}{1+x} = \frac{3-x}{x\ (1+x)} + \frac{1}{2x(1+\ln x)}$$

- **Différentielle logarithmique**

$$\boxed{d\left[\ln\left|y(x)\right|\right] = d\left[\ln\left|f(x)\right|\right] - d\left[\ln\left|g(x)\right|\right]}$$

$$\frac{dy_2}{y_2} = 3\frac{dx}{x} + \frac{dx}{2x(1+\ln x)} - \frac{4\ dx}{1+x} = \frac{(3-x)\ dx}{x\ (1+x)} + \frac{dx}{2x(1+\ln x)}$$

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 2 - Correction

- **Dérivée**

$$y_2' = \frac{x^2}{(1+x)^4}\left[\frac{(3-x)\sqrt{1+\ln x}}{(1+x)} + \frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\right]$$

- **Différentielle**

$$dy_2 = y_2' dx$$

$$= \frac{x^2}{(1+x)^4}\left[\frac{(3-x)\sqrt{1+\ln x}}{(1+x)} + \frac{1}{2\sqrt{1+\ln x}}\right] dx$$

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 3 :

On considère la chute ralentie d'une bulle de savon lâchée dans l'air avec une vitesse verticale initiale nulle. Les résultats sont consignés dans le tableau suivant où z désigne l'espace parcouru par la bulle pendant le temps t:

t(s)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z(cm)	50	48,9	46,6	43,5	40,0	36,2	32,4	28,5	24,5	20,6	16,6

a) Tracer les graphes z(t) et sa dérivée numérique z'(t). Les décrire.

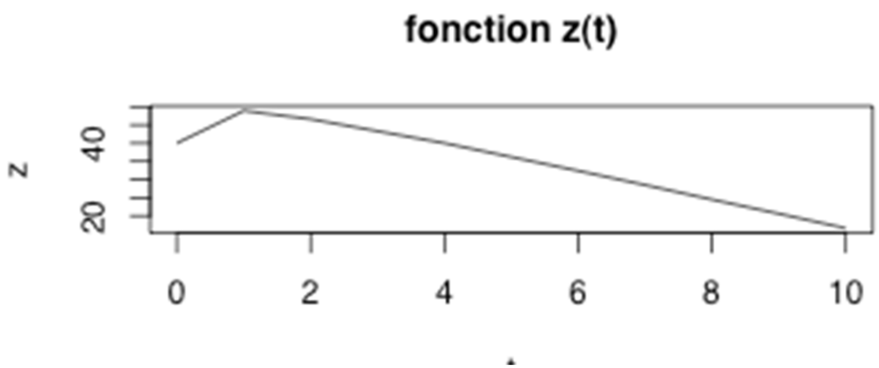
b) L'équation du phénomène est de la forme : $z(t) = 56{,}6 - 4t - 6{,}6\ e^{-0{,}6t}$

Comparer les valeurs de la dérivée obtenues par la méthode numérique aux valeurs calculées analytiquement.

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 3 - Correction

a) <u>Tracer les graphes z(t) et sa dérivée numérique z'(t). Les décrire.</u>



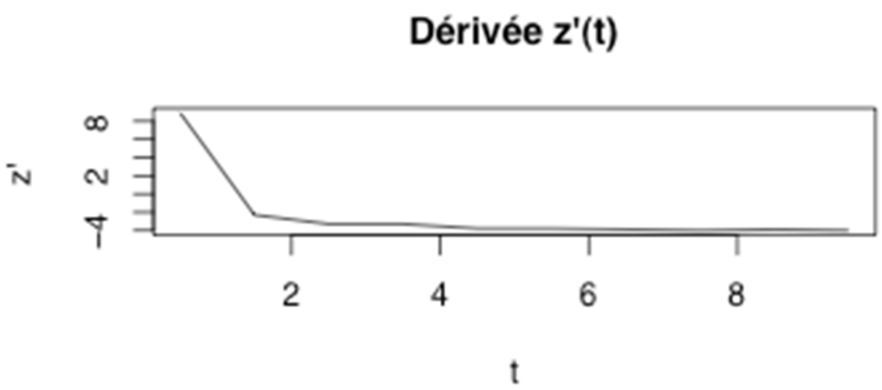
II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 3 - Correction

a) Tracer les graphes z(t) et sa dérivée numérique z'(t). Les décrire.

$$z'\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) \approx \frac{z_{i+1} - z_i}{t_{i+1} - t_i}$$

$$= \frac{\Delta z}{\Delta t}(cm.s^{-1})$$



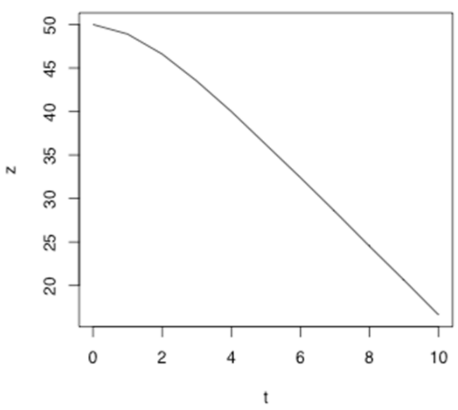
t (s)	z (cm)	t (s)	$\frac{\Delta z}{\Delta t}(cm.s^{-1})$
0	50	0.5	-1.10
1	48.9	1.5	-2.3
2	46.6	2.5	-3.1
3	43.5	3.5	-3.5
4	40	4.5	-3.8
5	36.2	5.5	-3.8
6	32.4	6.5	-3.9
7	28.5	7.5	-4
8	24.5	8.5	-3.9
9	20.6	9.5	-4
10	16.6		

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d’une variable

Exercice 3 - Correction

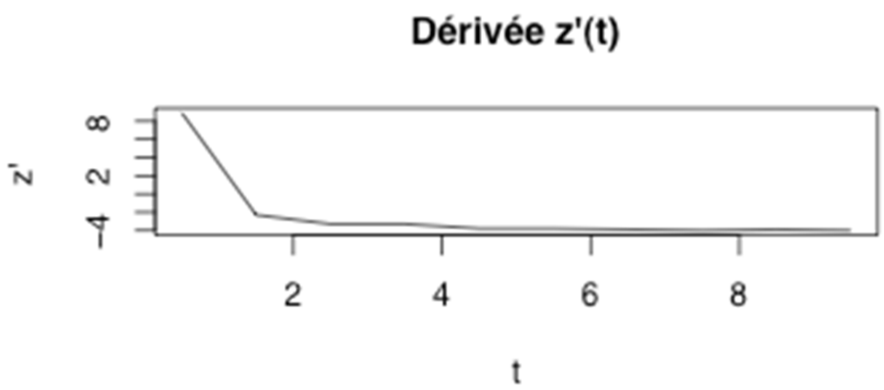
a) <u>Tracer les graphes z(t) et sa dérivée numérique z’(t). Les décrire.</u>

Fonction z(t)



Fonction z(t) décroissante donc la dérivée est négative

A l’origine, dérivée z’ équivaut à 0



Quand t augmente, z’ tend vers la valeur limite -4 $cm.s^{-1}$

La courbe z’(t) présente une asymptote $z'=-4$ $cm.s^{-1}$

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 3 - Correction

b) Comparaison dérivée analytique et dérivée numérique :

- $z=56{,}6-4t-6{,}6e^{-0{,}6t}$

z (cm) t (s)

$z'(t)=-4+3{,}96e^{-0{,}6t}$

z' ($cm.s^{-1}$)

- $$z'\left(\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\right)\approx\frac{z_{i+1}-z_i}{t_{i+1}-t_i}=\frac{\Delta z}{\Delta t}(cm.s^{-1})$$

t (s)	z (cm)	t (s)	$\frac{\Delta z}{\Delta t}(cm.s^{-1})$	Z' $(cm.s^{-1})$
0	50	0.5	-1.10	-0.04
1	48.9	1.5	-2.3	-1.07
2	46.6	2.5	-3.1	-2.39
3	43.5	3.5	-3.5	-3.12
4	40	4.5	-3.8	-3.52
5	36.2	5.5	-3.8	-3.73
6	32.4	6.5	-3.9	-3.85
7	28.5	7.5	-4	-3.92
8	24.5	8.5	-3.9	-3.96
9	20.6	9.5	-4	-3.98
10	16.6			-3.99

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 4 :

En courant alternatif de fréquence f, l'impédance Z d'une bobine d'inductance L et de résistance R est donnée par la relation :

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$$ avec la pulsation ω=2pf .

Résistance R = 10000 Ω, Inductance L = 30 H et f=50Hz

a) Comparer la variation de l'impédance lorsque f augmente de 2Hz puis quand f diminue de 5 Hz. Comparer les valeurs exactes aux valeurs approchées par la différentielle.

b) Calculer les incertitudes absolue et relative sur la valeur de Z si f est connu à ± 3 Hz.

c) Calculer la variation de l'impédance lorsque R diminue de 100 W.

d) Calculer les incertitudes absolue et relative sur la valeur de Z si L est connu à ± 1 H.

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 4 - Correction

Impédance d'une bobine: $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$ $\qquad \omega = 2\pi f$

Résistance R = 10000 Ω, Inductance L = 30 H

Pulsation ω , Fréquence f = 50 Hz

$\mathbf{Z} = (R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2)^{1/2}$ = **13741,**4133 **Ω**

a. Variation de la fréquence f : Δf_1= + 2 Hz, Δf_2= - 5 Hz

Z_{52}=14002,6668 Ω

Variation exacte ΔZ

$\Delta Z_1 = Z_{52} - Z_{50}$ =**+ 261**,2535 **Ω**

Z_{45}=13112,9484 Ω

$\Delta Z_2 = Z_{45} - Z_{50}$ =**- 628**,4649 **Ω**

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 4 - Correction

Variation approchée : différentielle **dZ**

$$dZ = \frac{(4\pi^2 L^2)\, f}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2}}\, df = \frac{4\pi^2 L^2 f}{Z}\, df$$

$df_1 = +\ 2$ Hz $\quad dZ_1 = +\ 258{,}56\ \Omega \quad$ **$\Delta Z_1 \approx +\ 260\ \Omega$**

$df_2 = -\ 5$ Hz $\quad dZ_2 = -\ 646{,}41\ \Omega \quad$ **$\Delta Z_2 \approx -\ 650\ \Omega$**

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 4 - Correction

b) Calculer les incertitudes absolue et relative sur la valeur de Z si f est connu à ± 3 Hz.

Incertitude absolue : $$\Delta Z = \left|\frac{\partial Z}{\partial f}\right| \Delta f = |dZ|$$

On dérive par rapport à la variable f, les autres sont des constantes

$$Z = \left(R^2 + L^2 2^2 \pi^2 f^2\right)^{1/2}$$

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial f} df \quad \text{on utilise } \left(u^n\right)' = n u' u^{n-1}$$

$$dZ = \frac{1}{2}\left(2 \times 4L^2\pi^2 f\right)\left(R^2 + 2L^2\pi f\right)^{-1/2} df$$

$$dZ = \frac{(4\pi^2 L^2)\, f}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2}} df = \frac{4\pi^2 L^2 f}{Z} df$$

$$\Delta Z = \left|\frac{4\pi^2 \times 30^2 \times 50}{\sqrt{10000^2 \times 4\pi^2 \times 30^2 \times 50^2}} \times 3\right| = 387{,}8 = 400$$

- **Incertitude absolue: Z = 13700 Ω ± 400 Ω**

Arrondi supérieur

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 4 - Correction

b) Calculer les incertitudes absolue et relative sur la valeur de Z si f est connu à ± 3 Hz.

Incertitude relative : $\frac{\Delta Z}{Z}$

Avec $\mathbf{Z = (R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2)^{1/2} = 13741,}4133\ \boldsymbol{\Omega}$

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \frac{\left| \frac{4\pi^2 \times 30^2 \times 50}{\sqrt{10000^2 \times 4\pi^2 \times 30^2 \times 50^2}} \times 3 \right|}{13741,4133} = 0,028 = 0,03$$

- **Incertitude relative:** $\frac{\Delta Z}{Z} = \sup\left|\frac{dZ}{Z}\right| = \frac{400}{13700}$ **= 0,03 = 3%**

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 4 - Correction

c. Variation de la résistance R: ΔR= - 100 Ω.

Variation exacte:

$$\Delta Z = Z_{9900} - Z_{10000} = -72{,}60\ \Omega$$

Variation approchée: différentielle **dZ**

$$dZ = \frac{R}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2}} dR = \frac{R}{Z} dR$$

dR = - 100 Ω

dZ = - 72,77 Ω

$\Rightarrow$ **ΔZ $\approx$ - 73 Ω**

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 4 - Correction

d) Calculer les incertitudes absolue et relative sur la valeur de Z si L est connu à ± 1 H.

Incertitude absolue : $\Delta Z = \left|\frac{\partial Z}{\partial L}\right| \Delta L = |dL|$

$$dZ = \frac{(4\pi^2 f^2)\, L}{\sqrt{R^2 + 4\pi^2 L^2 f^2}} dL = \frac{4\pi^2 f^2 L}{Z} dL$$

dZ = ± 215,47.. Ω

$$\Delta Z = \left|\frac{\partial Z}{\partial L}\right| \Delta L = |dL| = 300$$

Majore à l'unité supérieur

- **Incertitude absolue:** **Z = (13700 ± 300) Ω**

II. Dérivées et différentielles - Fonctions d'une variable

Exercice 4 - Correction

d) Calculer les incertitudes absolue et relative sur la valeur de Z si L est connu à ± 1 H.

Incertitude relative : $\dfrac{\Delta Z}{Z}$

Avec $\mathbf{Z = (R^2 + 4\pi^2L^2f^2)^{1/2} = 13741,}4133\ \Omega$

$$\Delta Z = \left|\frac{\partial Z}{\partial L}\right|\Delta L = \left|dL\right| = 300$$

Sommaire des exercices

1. Logarithmes et exponentielles
2. Dérivées et différentielles - Fonction d’une variable
3. Etude de fonctions
4. Dérivées et différentielles - Fonction de plusieurs variables
5. Exercices complémentaires

III. Etude de fonctions

Exercice 1 :

Etudier le sens de variation et faire la représentation graphique des fonctions suivantes :

$$y_1 = \frac{1+\ln x}{x} \qquad\qquad y_2 = x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

III. Etude de fonctions

Exercice 1 - Correction $y_1 = \dfrac{1+\ln x}{x}$

- Domaine de définition : $x>0$ et $D=R^{+*}$

III. Etude de fonctions

Exercice 1 - Correction $y_1 = \dfrac{1+\ln x}{x}$

- Domaine de définition : x>0 et D=R^{+*}
- Limites :

$$x \to 0^+ \qquad \ln(x) \to -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1+\ln(x)}{x} \to -\infty$$

$\Rightarrow$ asymptote verticale x = 0 (axe Oy)

$$x \to +\infty \qquad y = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \to 0$$

$\Rightarrow$ asymptote horizontale y = 0 (axe Ox)

III. Etude de fonctions

Exercice 1 - Correction $y_1 = \dfrac{1+\ln x}{x}$

- Dérivées :

$$y' = \frac{x.\frac{1}{x} - (1+\ln(x))}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\underbrace{y' = 0 \qquad x = 1 \qquad y = 1}_{\text{maximum}}$$

$$\begin{cases} y' > 0 & x < 1 \\ y' < 0 & x > 1 \end{cases}$$

III. Etude de fonctions

Exercice 1 - Correction

$$y_1 = \frac{1+\ln x}{x}$$

➢ Dérivées :

$$y' = \frac{x.\frac{1}{x} - (1+\ln(x))}{x^2} = -\frac{\ln(x)}{x^2}$$

$$\underbrace{y' = 0 \qquad x = 1 \qquad y = 1}_{\text{maximum}}$$

$$\begin{cases} y' > 0 & x < 1 \\ y' < 0 & x > 1 \end{cases}$$

$$y'' = \frac{-x^2.\frac{1}{x} + 2x\ln(x)}{x^4} = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}$$

$$\underbrace{y'' = 0 \qquad \ln(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e} \qquad y = 0{,}91}_{\text{inflexion}}$$

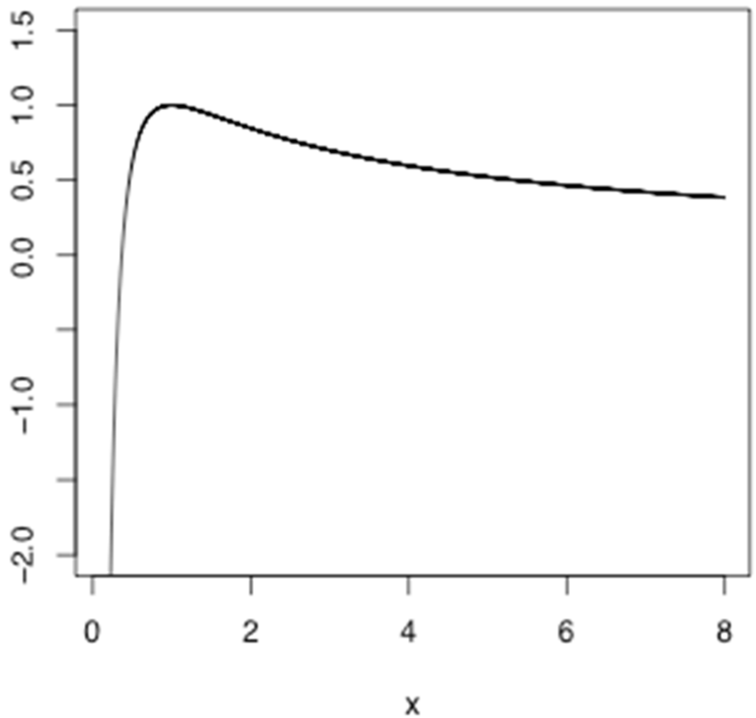
$$\begin{cases} y'' > 0 & x > 1{,}65 \\ y'' < 0 & x < 1{,}65 \end{cases}$$

III. Etude de fonctions

Exercice 1 - Correction $y_1 = \dfrac{1+\ln x}{x}$

➢ Tableau de variation :

X	0		1		$e^{1/2}$		$+\infty$
y'		+	0	-		-	
y	$-\infty$	↗	1	↘		↘	0
y''		-		-	0	+	



III. Etude de fonctions

Exercice 1 - Correction $y_2 = x\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

- Domaine de définition : D=R

  f(-x) = - f(x) la fonction est impaire

- Limites :

$$\left.\begin{array}{ll} x \to +\infty & y = \dfrac{x}{e^{+x^2/2}} \to 0^+ \\ & \\ x \to -\infty & y \to 0^- \end{array}\right\} \text{Asymptote } y = 0 \text{ (axe 0x)}$$

III. Etude de fonctions

Exercice 1 - Correction $\quad y_2 = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

- Dérivées :

$$y' = 0 \qquad \boxed{y' = e^{-x^2/2} + x\left(-\frac{2x}{2}\right)e^{-x^2/2} = \left(1 - x^2\right)e^{-x^2/2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 & y = -0{,}61 \\ x = 1 & y = 0{,}61 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y' > 0 \text{ pour } -1 < x < 1 \\ y' < 0 \text{ pour } x < -1 \text{ et } x > 1 \end{array}$$

$$\boxed{y'' = -2xe^{-x^2/2} + (1 - x^2)\left(-\frac{2x}{2}\right)e^{-x^2/2} = x(x^2 - 3)e^{-x^2/2}}$$

$$y'' = 0$$

$$\left.\begin{array}{lll} x = 0 & y = 0 & y' = 1 \\ x = -\sqrt{3} & y = -0{,}39 & y' = -0{,}45 \\ x = \sqrt{3} & y = 0{,}39 & y' = -0{,}45 \end{array}\right\}\text{inflexion}$$

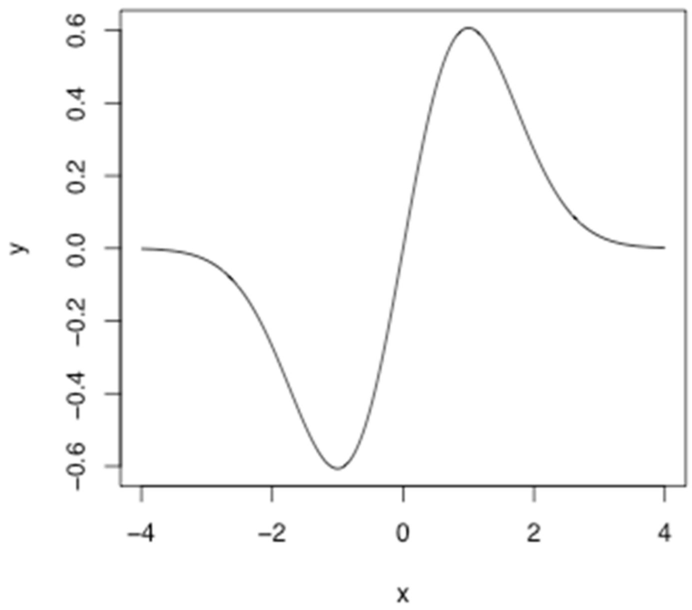
III. Etude de fonctions

Exercice 1 - Correction

$$y_2 = x\,e^{-\frac{x^2}{2}}$$

➢ Tableau de variation :

X	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		-		-	0	+		+	0	-		-	
y	0^-		-0,39		-0,61		0		0,61		0,39		0^+
y''		-	0	+		+	0	-		-	0	+	



III. Etude de fonctions

Exercice 2 :

Etudier le sens de variation de la fonction :

$$y = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Montrer que cette fonction possède une fonction réciproque dont on donnera l'expression. Représenter graphiquement les deux fonctions dans le même système d'axes.

III. Etude de fonctions

Exercice 2 - correction

$$y = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

- Domaine de définition :

$$\frac{1+x}{1-x} > 0$$

$$D = \left]-1,1\right[$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
1+x	-	0	+		+
1-x	+		+	0	-
Q	-	0	+	$\|$	-

- Parité

$$f(-x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x)$$

fonction est impaire

III. Etude de fonctions

Exercice 2 - correction

$$y = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

- Limites

$x \to 1 \quad \frac{1+x}{1-x} \to \frac{2}{0} = +\infty \qquad y \to +\infty \qquad \Rightarrow$ asymptote verticale x = 1

$x \to -1 \quad \frac{1+x}{1-x} \to \frac{0}{2} = 0 \qquad y \to -\infty \qquad \Rightarrow$ asymptote verticale x = -1

- Dérivées $\quad y = \ln(1+x) - \ln(1-x)$

$$y' = \frac{1}{1+x} - \frac{-1}{1-x} = \frac{2}{\left(1-x^2\right)}$$

III. Etude de fonctions

Exercice 2 - correction

$$y = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$y'' = \left[2\left(1-x^2\right)^{-1}\right]' = 2(-1)\left(1-x^2\right)^{-2}(-2x) = \frac{4x}{\left(1-x^2\right)^2}$$

➢ Tableau de variation :

x	-1		0		+1
y'	‖	+	2	+	‖
y	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖
y''	‖	-	0	+	‖

III. Etude de fonctions

Exercice 2 - correction Fonction réciproque :

La fonction est continue et strictement monotone, c'est donc une bijection réciproque.

$$y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad x \in \left]-1,1\right[\qquad y \in R$$

$$\Leftrightarrow e^{y} = \frac{1+x}{1-x} \Leftrightarrow e^{y}(1-x) = 1+x$$

$$\Leftrightarrow e^{y} - 1 = x\left(1+e^{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{e^{y}-1}{e^{y}+1}}$$

III. Etude de fonctions

Exercice 2 - correction Fonction réciproque :

$$x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$$

- Parité

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{e^{-x}\left(1 - e^x\right)}{e^{-x}\left(1 + e^x\right)} = -f(x)$$

fonction est impaire

- Dérivées

$$y' = \frac{e^x\left(e^x + 1\right) - \left(e^x - 1\right)e^x}{\left(e^x + 1\right)^2} = \frac{2e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$$

$y' > 0 \qquad \forall x$

III. Etude de fonctions

Exercice 2 - correction Fonction réciproque :

$$x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$$

$$y'' = \frac{-\ 2e^x}{\left(e^x + 1\right)^3}\left(e^x - 1\right)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0 \qquad y = 0 \qquad y' = \frac{1}{2}$$ Point d'inflexion

- Limites

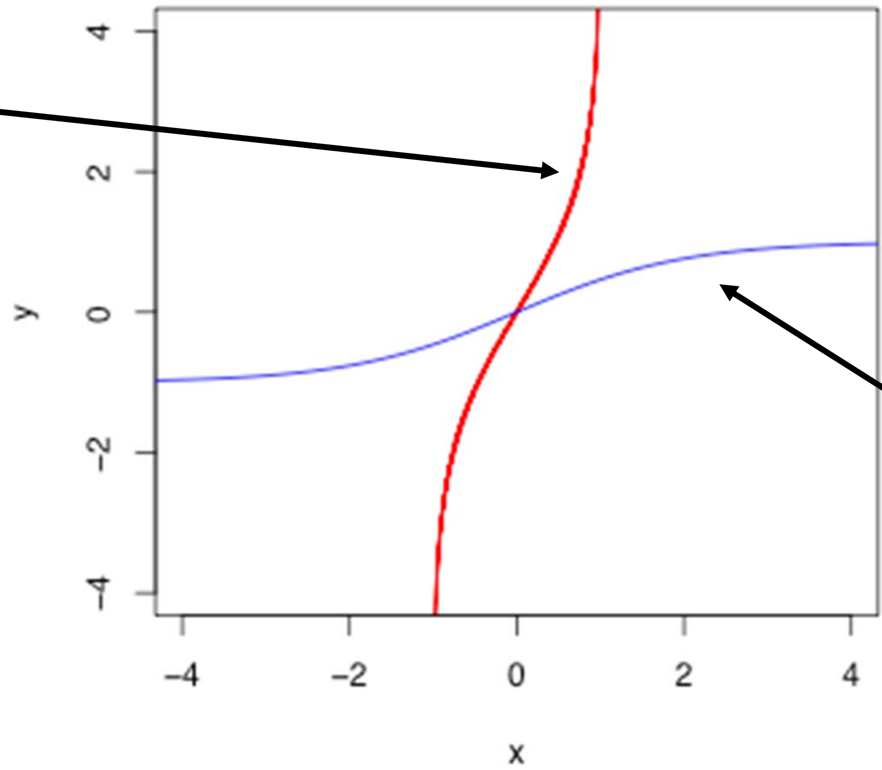
$$x \to +\infty \qquad y = \frac{e^x\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} \to 1$$ $\Rightarrow$ asymptote horizontale y = 1

$$x \to -\infty \qquad e^x \to 0 \qquad y \to -1$$ $\Rightarrow$ asymptote horizontale y = -1

III. Etude de fonctions

Exercice 2 - correction Graphe :

$$y = \ln \frac{1+x}{1-x}$$



$$x = \frac{e^y - 1}{e^y + 1}$$

III. Etude de fonctions

Exercice 3 :

Trouver les limites des expressions suivantes :

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \qquad B = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^n - 1} \qquad C = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} \qquad D = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x - \frac{3}{2}\sin 2x}$$

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^2} \qquad F = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3} \qquad G = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2}$$

$$H = \lim_{x \to 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}$$

III. Etude de fonctions

Exercice 3 - Correction

Rappel 0/0 est une Forme indéterminée, penser à utiliser la règle de l'hospital.

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{\sin x} = 2$$

$$B = \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^{n} - 1} = \frac{1}{n}$$

$$C = \lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$$

$$D = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x - \frac{3}{2}\sin 2x} = \frac{-3}{2}$$

$$E = \lim_{x \to 0} \frac{e - e^{\cos x}}{x^{2}} = \frac{e}{2}$$

$$F = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{\sin x}}{x^{3}} = \frac{1}{6}$$

III. Etude de fonctions

Exercice 3 - Correction

$$G = \lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - x^2 - 2}{\sin^2 x - x^2} = -\frac{1}{4}$$

$$H = \lim_{x \to 0} (\cos x + \sin x)^{1/x} = 1$$

Sommaire des exercices

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 :

Calculer les dérivées partielles premières et secondes, puis la différentielle totale de la fonction.

$$F(x,y,z) = 8\,xy^2z^3 - 3\,x^2y\,z + 5\,x^2 + 4\,y + 9\,z^3$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 - Correction

$$F(x,y,z) = 8\,xy^2z^3 - 3\,x^2y\,z + 5\,x^2 + 4\,y + 9\,z^3$$

- $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 8y^2z^3 - 6xyz + 10x$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] = -6yz + 10$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] = 16yz^3 - 6xz$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right] = 24y^2z^2 - 6xy$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 - Correction

$$F(x,y,z) = 8\,xy^2z^3 - 3\,x^2y\,z + 5\,x^2 + 4\,y + 9\,z^3$$

- $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 16xyz^3 - 3x^2z + 4$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] = 16yz^3 - 6xz$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] = 16xz^3$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right] = 48xyz^2 - 3x^2$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 - Correction

$$F(x,y,z) = 8\,xy^2z^3 - 3\,x^2y\,z + 5\,x^2 + 4\,y + 9\,z^3$$

- $$\frac{\partial F}{\partial z} = 24xy^2z^2 - 3x^2y + 27z^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right] = 24y^2z^2 - 6xy$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right] = 48xyz^2 - 3x^2$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right] = 48xy^2z + 54z$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 - Correction

$$F(x,y,z) = 8\,xy^2z^3 - 3\,x^2y\,z + 5\,x^2 + 4\,y + 9\,z^3$$

- **Différentielle totale**

$$\boxed{\begin{aligned} dF = (8y^2z^3 - 6xyz + 10x)\,dx + (16xyz^3 - 3x^2z + 4)\,dy \\ + (24xy^2z^2 - 3x^2y + 27z^2)\,dz \end{aligned}}$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 2 :

Soit f(x,y) la fonction des deux variables réelles x et y, définie pour $\frac{y}{x} > 0$ par :

$$f(x,y) = x \arctan \frac{y}{x} + \ln \frac{y}{x}$$

a) Ecrire la différentielle totale df de cette fonction.

b) Calculer ses dérivées partielles secondes. Vérifier que : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

c) Calculer l'expression $E = x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 2 - Correction

$$f(x,y) = x \arctan \frac{y}{x} + \ln \frac{y}{x}$$

a) Dérivées partielles premières et différentielle totale.

$$\boxed{\arctan(u(x))' = \frac{1}{1+u(x)^2}u'(x)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \arctan\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{1}{y}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

$$\boxed{df = \left[\arctan\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{x}\right]dx + \left[\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{1}{y}\right]dy}$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 2 - Correction

$$f(x,y) = x \text{ arc tan } \frac{y}{x} + \ln \frac{y}{x}$$

b) Dérivées partielles secondes.

- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\arctan\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{x}\right] = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{1}{y}\right] = \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\arctan\frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2+y^2} - \frac{1}{x}\right] = -\frac{2y^3}{(x^2+y^2)^2} + \frac{1}{x^2}$$
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{1}{y}\right] = -\frac{2yx^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{y^2}$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 2 - Correction

$$f(x,y) = x \arctan \frac{y}{x} + \ln \frac{y}{x}$$

c) Calcul de E.

- $E = x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \mathbf{0}$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 3 :

L'équation d'état d'un gaz, selon VAN DER WAALS, s'écrit:

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

où P est la pression, V le volume, T la température et a, b et R sont des constantes.

L'étude des équilibres liquide-vapeur montre que l'état liquide ne peut être obtenu que pour des températures inférieures à une certaines « température critique » T_c pour un « volume critique » V_c.

a) Calculer V_c et T_c sachant qu'ils vérifient simultanément :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial V}\right]_{T=T_C} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right]_{T=T_C} = 0$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 3 :

b) En déduire la pression critique $\mathbf{T_c}$ à l'aide de l'équation de VAN DER WAALS.

c) En posant : $p = \dfrac{P}{P_c}$, $v = \dfrac{V}{V_c}$, $t = \dfrac{T}{T_c}$,

Écrire la nouvelle forme de l'équation de VAN DER WAALS. Montrer que p et t étant évidemment positifs, v doit être supérieur à une valeur que l'on précisera.

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 3 - Correction

Equation de VAN DER WAALS : $\left(P+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT$

a) Calculer V_c et T_c sachant qu'ils vérifient simultanément :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial V}\right]_{T=T_c}=0 \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right]_{T=T_c}=0$$

$$P=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^2}$$

T = constante : $\dfrac{\partial P}{\partial V}=-\dfrac{RT}{(V-b)^2}+\dfrac{2a}{V^3}$ $\qquad \dfrac{\partial^2 P}{\partial V^2}=\dfrac{2RT}{(V-b)^3}-\dfrac{6a}{V^4}$

Si $T=T_c$ et $V=V_c$ $\quad \dfrac{\partial P}{\partial V}=0$ et $\dfrac{\partial^2 P}{\partial V^2}=0$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 3 - Correction

$$\begin{cases} -\dfrac{RT}{(V-b)^2}+\dfrac{2a}{V^3}=0 \\[2ex] \dfrac{2RT}{(V-b)^3}-\dfrac{6a}{V^4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{RT}{(V-b)^2}=\dfrac{2a}{V^3} & (1) \\[2ex] \dfrac{2RT}{(V-b)^3}=\dfrac{6a}{V^4} & (2) \end{cases}$$

Division membre à membre :

$$\frac{\dfrac{RT}{(V-b)^2}}{\dfrac{2RT}{(V-b)^3}}=\frac{\dfrac{2a}{V^3}}{\dfrac{6a}{V^4}} \Rightarrow \frac{V-b}{2}=\frac{V}{3} \Leftrightarrow 3V_c-3b=2V_c \Leftrightarrow \boxed{V_c=3b}$$

Dans (1) :

$$RT_c=\frac{2a}{(3b)^3}(3b-b)^2 \Leftrightarrow \boxed{RT_c=\frac{8a}{27b}}$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 3 - Correction

b) En déduire la pression critique $\mathbf{P_c}$ à l'aide de l'équation de VAN DER WAALS.

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

$$P_c = \frac{RT}{V_c - b} - \frac{a}{{V_c}^2} = \frac{8a}{27b \times 2b} - \frac{a}{9b^2} \Leftrightarrow \boxed{P_c = \frac{a}{27b^2}}$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 3 - Correction

c) En posant :

$$P = pP_c \qquad T = tT_c \qquad V = vV_c$$

Écrire la nouvelle forme de l'équation de VAN DER WAALS.

$$\left(\frac{a}{27b^2}p + \frac{a}{9b^2v^2}\right)(3bv - b) = \frac{8a}{27b}t$$

$$\frac{a}{27b^2}\left(p + \frac{3}{v^2}\right)b(3v - 1) = \frac{8a}{27b}t$$

$$\boxed{\left(p + \frac{3}{v^2}\right)(3v - 1) = 8t}$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 3 - Correction

$$\boxed{\left(p+\frac{3}{v^2}\right)(3v-1)=8t}$$

Montrer que p et t étant évidemment positifs, v doit être supérieur à une valeur que l'on précisera.

$$\left.\begin{array}{l} 8t>0 \\ p+\dfrac{3}{v^2}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{3v-1>0} \qquad \Leftrightarrow v>\frac{1}{3} \Leftrightarrow v>\frac{V_c}{3} \qquad \underline{V>b}$$

Car p et t positif

Or Vc=3b

v=V+Vc

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 4 :

L'impédance Z d'une bobine d'inductance L et de résistance R est données par la relation :

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \text{ avec la pulsation } \omega = 2\pi f\,.$$

On donne : $R = 10000\ \Omega$, $L = 30$ H, $f = 50$ Hz.

a. Calculer, en utilisant la différentielle totale, la variation de l'impédance lorsque R diminue de 100 Ω et que L augmente de 5 H.

Comparer la valeur obtenue à la valeur exacte.

b. Calculer les incertitudes absolue et relative sur Z si $\Delta R = \pm\ 50\ \Omega$ et $\Delta L = \pm\ 1\ H$.

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 4 - Correction

Impédance d'une bobine: $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$

$\omega = 2\pi f$

Résistance R = 10000 Ω, Inductance L = 30 H

Pulsation ω , Fréquence f = 50 Hz

Z (R,L) = 13741,4133 **Ω**

a. Variation ΔZ si ΔR = - 100 Ω et ΔL= + 5 H

- **Calcul exact:**

$\Delta Z = Z_{(R_{9900};L_{35})} - Z_{(R_{10000};L_{30})}$ =**+ 1054,28 Ω**

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 4 - Correction

Impédance d'une bobine: $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$

- **Valeur approchée: différentielle dZ**

$$dZ = \frac{R}{Z}dR + \frac{4\pi^2 f^2 L}{Z}dL$$

Avec dR=-100 et dL= +5

dZ = + 1005 Ω

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 4 - Correction

Impédance d'une bobine: $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$

- **Valeur approchée: différentielle dZ**

$$dZ = \frac{R}{Z} dR + \frac{4\pi^2 f^2 L}{Z} dL$$

Avec dR=-100 et dL= +5

$$\boxed{\Delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| \Delta z = \left|\frac{\partial g}{\partial x}\right| \left|dx\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right| \left|dy\right| + \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right| \left|dz\right|}$$

b. Incertitudes absolue ΔZ et relative ΔZ/Z si dR= ± 50 Ω et dL= ± 1 H

Incertitude absolue: ΔZ ≈ 252 Ω

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 4 - Correction

$$\boxed{\frac{\Delta g}{g} = \sup\left|\frac{dg}{g}\right| = \frac{1}{|g|}\left[\left|\frac{\partial g}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial g}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial g}{\partial z}\right|\Delta z\right]}$$

- **Incertitude relative: $\Delta Z/Z = 0{,}018$**

- **Ecriture du résultat:**

$Z = 13700\ \Omega \pm 300\ \Omega$ ou **$Z = (1{,}37 \pm 0{,}03).10^4\ \Omega$**

$$\boxed{\Delta Z/Z = 2\ \%}$$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 5 :

On mesure la période T d'un pendule par une comparaison à celle T_0 d'une horloge astronomique en utilisant la méthode des coïncidences. Si n désigne le nombre d'oscillations complètes séparant deux coïncidences successives, la relation liant T à T_0 s'écrit :

$$T = T_0 \frac{n}{n+1}.$$

Sachant que $T_0 = 2{,}000000$ s à 10^{-6} près et $n=5000 \pm 20$, calculer les incertitudes relative et absolue sur la mesure de T.

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 5 - Correction

$$\mathrm{T} = \mathrm{T_0}\ \frac{n}{n+1}.$$

$T_0 = (2{,}000000 \pm 0{,}000001)$ s
$n = 5000 \pm 20$

$\Longrightarrow$ $\mathbf{T} = 2 \times \frac{5000}{5001} = \mathbf{1{,}99960008\ s}$

- **Incertitude relative:** $\frac{\Delta T}{T} = \sup\left|\frac{dT}{T}\right|$

To et n car ce sont les deux variables qui varient.

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta T_0}{T_0} + \frac{\Delta n}{n(n+1)}$$

$$\Delta T = \left|\frac{\partial T}{\partial T_0}\right|\left|\Delta T_0\right| + \left|\frac{\partial T}{\partial n}\right|\left|\Delta n\right| = \left|\frac{n}{n+1}\right|\left|\Delta T_0\right| + \left|T_0\ \frac{n+1-n}{(n+1)^2}\right|\left|\Delta n\right|$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\left|\Delta T_0\right|}{T_0} + \frac{\left|\Delta n\right|}{n(n+1)}$$

$=10^{-6}/2+20/(5000+5001)=1{,}3.10^{-6}$

IV. Dérivées et différentielles de fonctions de plusieurs variables

Exercice 5 - Correction

$$T = T_0 \frac{n}{n+1}.$$

- **Incertitude absolue:**

  $\Delta T = 1,3.\ 10^{-6}\,T = 2,6.10^{-6}$ s

- **Ecriture du résultat:**

T = 1,999600 s ± 0,000003 s $\quad\quad$ **$\Delta T/T = 3.10^{-6}$**

Sommaire des exercices

1. Logarithmes et exponentielles
2. Dérivées et différentielles - Fonction d'une variable
3. Etude de fonctions
4. Dérivées et différentielles - Fonction de plusieurs variables
5. Exercices complémentaires

Exercice 1 :

Cochez la ou les expressions exactes.

A Soit l'équation ln(x+4)+ln(x-1)=ln(6), ses solutions sont : -5 et 2.

B Soit l'équation ln(x+4)+ln(x-1)=ln(6), sa solution est 2.

C $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} = \frac{-2}{10}$

D $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)-1}{x^3+5x^2} = \frac{-2}{5}$

E Les propositions A, B, C, D sont fausses.

Exercice 2 :

Cochez la ou les réponses exactes :

A $\lim_{x \to +\infty} \cos(x) = 1$

B $\lim_{x \to +\infty} \cos(x) = \varnothing$

C $\lim_{x \to 0} \dfrac{e - e^{\cos(x)}}{x^2} = \dfrac{e}{2}$

D $\lim_{x \to 0} \dfrac{e - e^{\cos(x)}}{x^2} = 0$

E Les propositions A, B, C et D sont fausses.

Exercice 3 :

Soit la fonction suivante : $g(x) = xe^{x-1} - 1$ définie sur $\Re$

Cochez la ou les réponses exactes :

A La droite x=-1 est une asymptote verticale de la fonction g.

B La droite y=-1 est une asymptote horizontale de la fonction g.

C Oy est une direction asymptotique de la fonction g.

D Ox est une direction asymptotique de la fonction g.

E Les propositions A, B, C et D sont fausses.

Exercice 4 :

Soit la fonction suivante : $g(x) = (x-4)^2 + 2$ définie sur $I =]-\infty, 4]$

Cochez la ou les réponses exactes :

A La fonction *g* est une fonction bijective de $I =]-\infty, 4]$ sur $J = [2, +\infty[$

B La fonction *g* est une fonction bijective de $I =]-\infty, 4]$ sur $J =]2, +\infty]$

C La fonction réciproque de *g* est $x = 4 + \sqrt{y-2}$

D La fonction réciproque de *g* est $x = 4 - \sqrt{y-2}$

E Les propositions A, B, C et D sont fausses.

Exercice 5 :

Soit la fonction suivante $f(x) = x^2(x-1)^2 + 3x$

On cherche à déterminer la tangente à l'origine de la courbe *f*

Cochez la ou les réponses exactes :

A Le coefficient directeur de la tangente est la dérivée de la courbe au point x=0

B L'équation de la tangente à l'origine de la courbe *f* est $y = 3x + 1$

C La tangente coupe la courbe en un second point qui est M=(1,3)

D La tangente coupe la courbe en un point unique.

E Les propositions A, B, C et D sont fausses.

Exercice 6 :

Soit la fonction : $$f(x,y,z) = \arctan\left(\frac{xy}{z^2}\right)$$

Cochez la ou les expressions exactes.

A $$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{x}{z}}{1+\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2}$$

B $$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$$

C

La différentielle totale est : $$\frac{\frac{y}{z^2}}{1+\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2} + \frac{\frac{x}{z^2}}{1+\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2} + \frac{-2z^{-3}xy}{1+\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2}$$

D

La différentielle totale est : $$\frac{\frac{y}{z^2}}{1+\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2}\,dx + \frac{\frac{x}{z^2}}{1+\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2}\,dy + \frac{-2z^{-3}xy}{1+\left(\frac{xy}{z^2}\right)^2}\,dz$$

E *Les propositions A, B, C, D sont fausses.*

Exercice 7 :

On cherche à calculer l'incertitude sur la concentration C d'une substance X, déterminée à partir d'une pesée d'une masse m de X, dissoute dans le volume V. Par définition, la concentration C d'une substance X est égale à

$$C(m,V) = \frac{m}{M_x V}$$

où M_X (qui désigne la masse molaire de X) est connue et est une constante. La valeur m est une valeur expérimentale, pesée à la balance, sa valeur est donnée à 10^{-4} g près. Le volume V de la fiole jaugée ayant servi à préparer les solutions est connu (100 mL), l'incertitude sur la valeur du volume est fournie par le fabricant de verrerie : l'incertitude dV sur une fiole de 100 mL est de 0,1 mL.

Cochez la ou les expressions exactes.

A L'incertitude relative de la concentration peut être définie par $\dfrac{|dm|}{m} + \dfrac{|dV|}{V}$

B L'incertitude absolue de la concentration peut être définie par $\dfrac{|dm|}{m} + \dfrac{|dV|}{V}$

C La variation relative de la concentration vaut : $\dfrac{dm}{m} + \dfrac{dV}{V}$

D La variation absolue de la concentration vaut : $\dfrac{dm}{M_x V} - \dfrac{m dV}{V^2 M_X}$

E Les propositions A, B, C, D sont fausses

Problème :

Un laboratoire fabrique un produit pharmaceutique ; sa capacité de production ne peut excéder 2.1 tonnes de produit. On note x la masse en tonnes de produit fabriqué. Le coût de fabrication, en millions d'euros, de x tonnes de produit est égal à F(x), F étant la fonction suivante :

$$F(x) = 3x + 3 + (x - 3)e^{x}$$

Si on note k le prix de vente, en millions d'euros, d'une tonne de produit, alors

P(x)=kx-F(x) donne le profit (ou perte) en millions d'euros réalisé(e) après la fabrication et la vente de x tonnes de produits. On suppose k=3.

Remarque : $e^{1} \approx 2.718282$

1. *Cochez la ou les expressions exactes.*

A *Cette fonction F est impaire.*

B *Cette fonction F est paire.*

C *Cette fonction F s'annule en 0.*

D *Dans le cadre de cette étude, la fonction F n'est définie que sur l'intervalle* $[0;2,1]$.

E *Les propositions A, B, C, D sont fausses.*

2. *Cochez la ou les expressions exactes.*

A $F'(x) = e^x(x-2)$

B *La fonction* $g(x) = e^x(x-2)$ *possède sur* $[0;2.1]$ *un minimum qui est* $-e^1$.

C *La fonction F est strictement croissante sur* $[0;2.1]$.

D *La fonction F est strictement décroissante sur* $[0;2.1]$.

E *Les propositions A, B, C, D sont fausses.*

3. *Cochez la ou les expressions exactes.*

A $F''(x) = e^x(x-1)$

B *F n'admet pas de point d'inflexion.*

C *F admet un point d'inflexion.*

D *La fonction F est strictement concave sur son domaine de définition*

E *Les propositions A, B, C, D sont fausses.*

4. *Cochez la ou les expressions exactes.*

A *La fonction de profit P est strictement croissante.*

B *La fonction de profit P est strictement décroissante.*

C *Le laboratoire pharmaceutique réalisera un profit maximum pour $x=2$ tonnes.*

D *Le laboratoire pharmaceutique réalisera un profit maximum pour $x=2.1$ tonnes.*

E *Les propositions A, B, C, D sont fausses.*

Med@TICE
Université Joseph Fourier Grenoble 1
ETUDES DE SANTÉ
Première Année Commune

www.medatice-grenoble.fr

Mentions légales

Ce document a été réalisé par la Cellule TICE de la Faculté de Médecine et de Pharmacie de Grenoble
(Université Joseph Fourier – Grenoble 1)