

*UE4 : Evaluation des méthodes d'analyses appliquées
aux sciences de la vie et de la santé – Analyse*

Chapitre 5 :

Application des dérivées des fonctions d'une variable réelle

Christelle MELODELIMA

Année universitaire 2011/2012

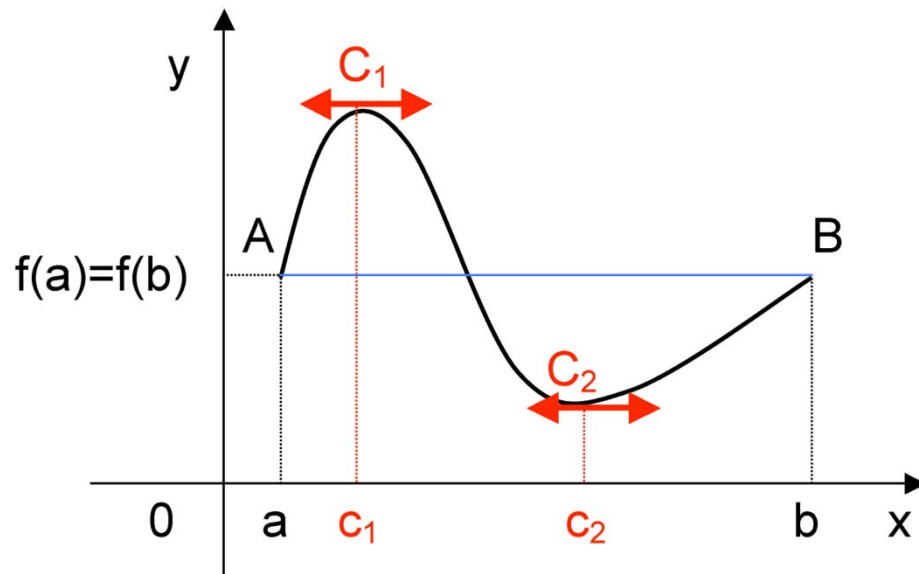
Université Joseph Fourier de Grenoble - Tous droits réservés.

I. Théorème de Rolle

a. Théorème

Soit la fonction $f(x)$ définie et **continue** sur $[a,b]$, **dérivable** sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Il existe au moins une valeur c appartenant à $]a,b[$ pour laquelle $f'(c) = 0$.

b. Interprétation géométrique



En C_1 et C_2 , tangentes à coefficient directeur nul: $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$
 \Rightarrow tangentes parallèles à Ox et AB

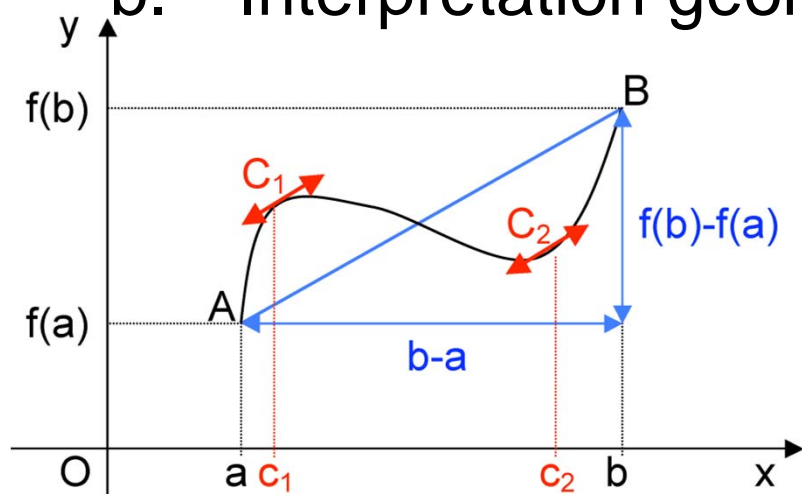
II. Théorème des accroissements finis

a. Théorème

Soit la fonction $f(x)$ définie et **continue** sur $[a,b]$, **dérivable** sur $]a,b[$,
Il existe au moins une valeur c appartenant à $]a,b[$ telle que:

$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c) \text{ ou } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

b. Interprétation géométrique



* Coefficient directeur de la droite AB :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

* $f'(c_1) = f'(c_2)$ coefficient directeur des tangentes à la courbe en C_1 et C_2 .

⇒ Il existe au moins un point C de la courbe AB où la tangente est parallèle à la droite AB .

II. Théorème des accroissements finis

c. Autres notations

- * $f(b) = f(a) + (b-a) f'(c)$ avec $c \in]a, b[$
- * Si b proche de a , on écrit $b = a+h \Rightarrow b-a = h$

Comme $c \in]a, a+h[$, $c = a + \theta h$ avec $\theta \in]0, 1[$

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a+\theta h) \text{ avec } \theta \in]0, 1[$$

Formule d'approximation à l'ordre 1

$$f(a+h) \approx f(a) + h f'(a) \text{ au voisinage de } a$$

II. Théorème des accroissements finis

Exemples

Calculer une approximation à l'ordre 1 des fonctions suivantes :

$\ln(1+h)$ au voisinage de 1

e^h au voisinage de 0

II. Théorème des accroissements finis

$\ln(1+h) \approx h$ au voisinage de 1 (avec $a=1, b=1+h$)

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \ln(1+h) &= \ln(1) + h \ln'(1) && \text{Ici, } a=1 \\ &= 0 + h \times 1 \\ &= h \end{aligned}$$

II. Théorème des accroissements finis

$e^h \approx 1+h$ au voisinage de 0 (avec $a=0$, $b=h$)

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a)$$

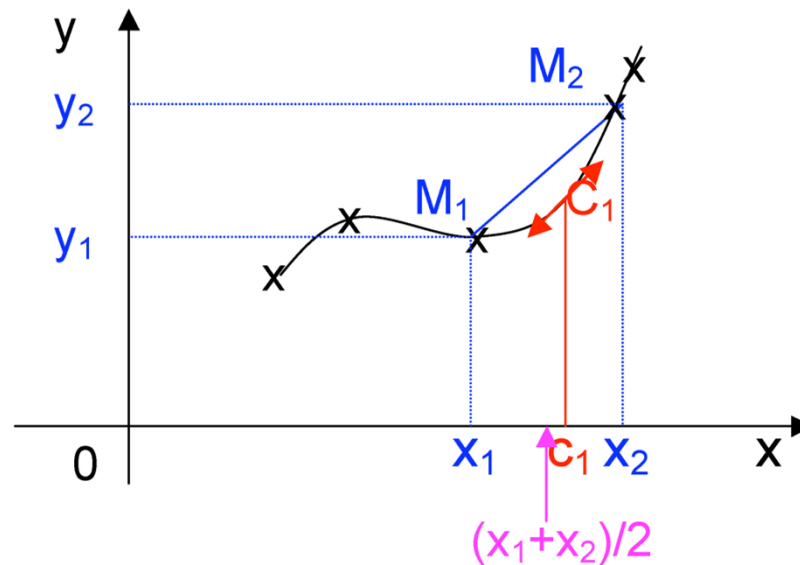
$$\begin{aligned} \text{donc } e^{(0+h)} &= e^0 + h(e^0)' \\ &= 1 + h \end{aligned}$$

II. Théorème des accroissements finis

d. Application : méthode numérique de dérivation

- * **Courbe expérimentale** décrite par les points M_i de coordonnées x_i et y_i (y_i mesurés pour différents x_i)

Expression analytique $y=f(x)$ inconnue.

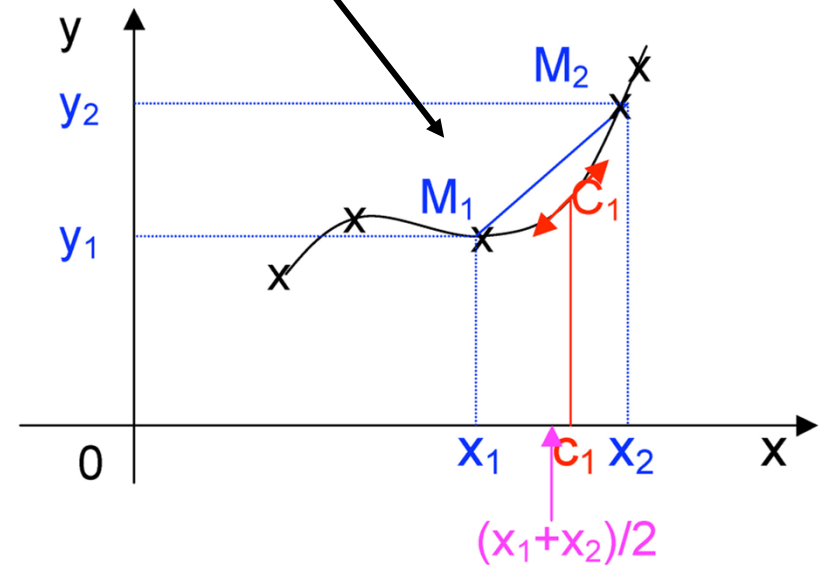


La dérivée $f'(x)$ sera calculée point par point en utilisant le théorème des accroissements finis.

II. Théorème des accroissements finis

d. Application : méthode numérique de dérivation

Entre deux points consécutifs $M_1(x_1, y_1)$ et $M_2(x_2, y_2)$:

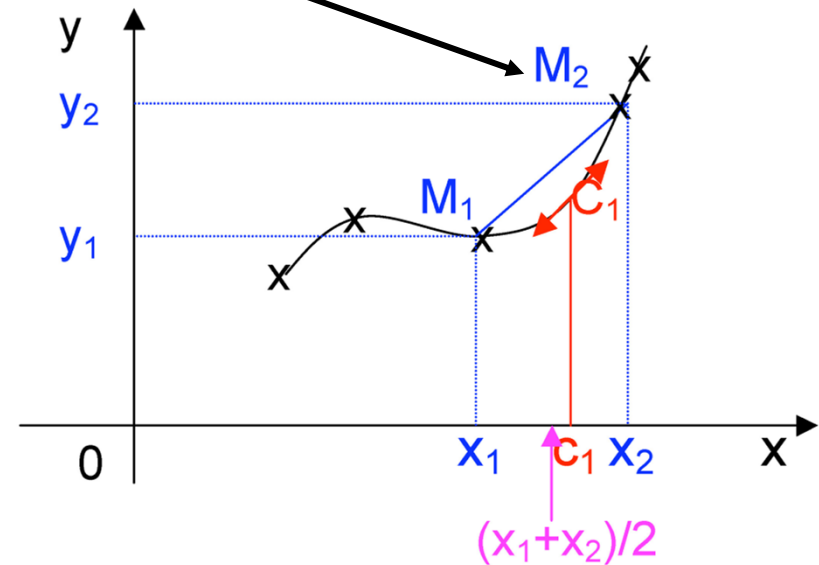


II. Théorème des accroissements finis

d. Application : méthode numérique de dérivation

Entre deux points consécutifs $M_1(x_1, y_1)$ et

$M_2(x_2, y_2)$:



II. Théorème des accroissements finis

d. Application : méthode numérique de dérivation

Entre deux points consécutifs $M_1(x_1, y_1)$ et

$M_2(x_2, y_2)$:

on calcule la **valeur de la dérivée en** un point intermédiaire

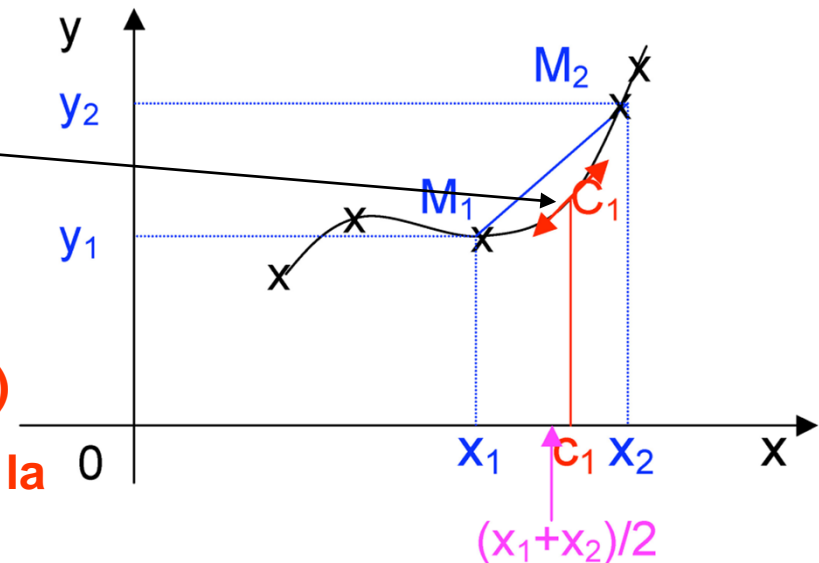
C_1 de coordonnées exactes inconnues

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = f'(c_1)$$

valeur de la dérivée en $c_1 \in]x_1, x_2[$

Coeff directeur de la tangente en $C_1 = f'(C_1)$

On approxime en disant que M_1M_2 tend vers la tangente (cf chap 3)



II. Théorème des accroissements finis

d. Application : méthode numérique de dérivation

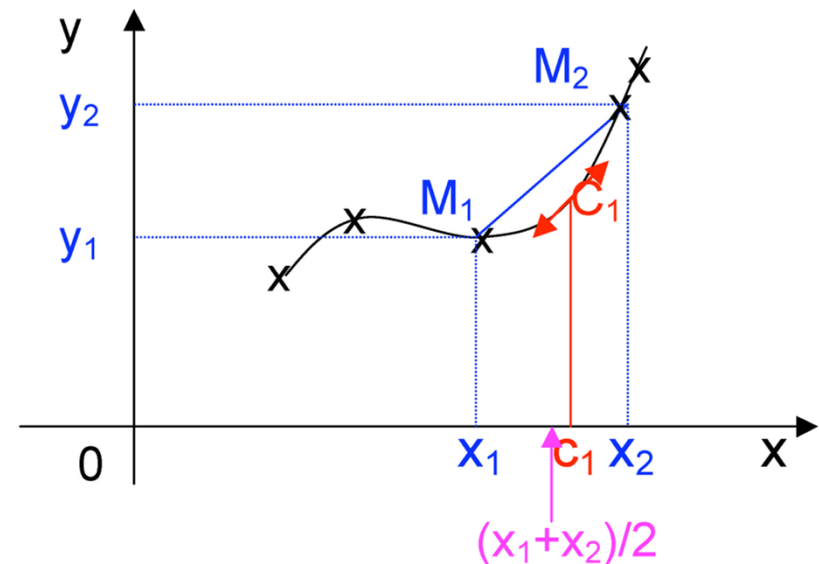
Comme M_1 et M_2 sont proches, on remplace l'abscisse par la valeur approchée égale à la moyenne des abscisses de M_1 et M_2 .

$$c_1 \approx \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \Rightarrow \quad f' \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

* La **courbe dérivée** passe par le point M_{12} de coordonnées:

abscisse $\frac{x_1 + x_2}{2}$

ordonnée $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

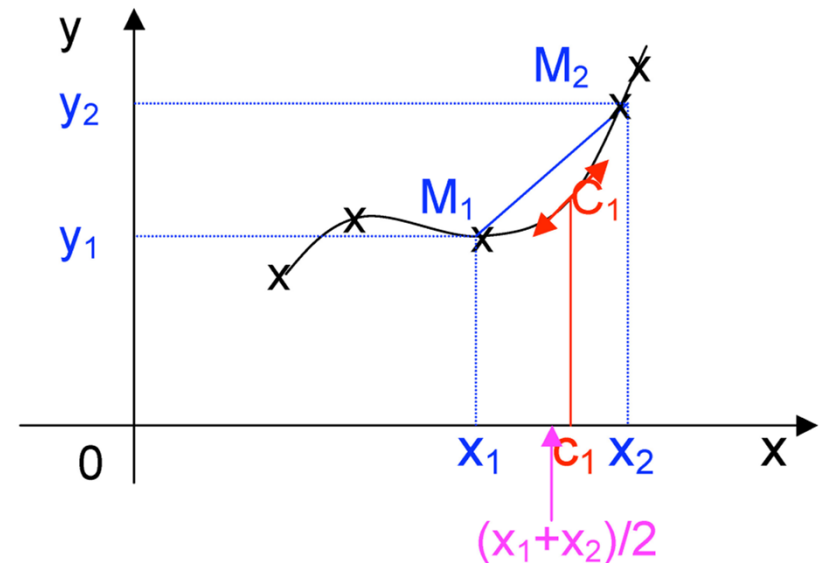


II. Théorème des accroissements finis

d. Application : méthode numérique de dérivation

A partir de n points M_i , on calcule $(n-1)$ points M_{ij} pour la courbe dérivée.

L'approximation est d'autant meilleur que l'écart entre les points successifs est petit (cf. définition de la dérivée).



II. Théorème des accroissements finis

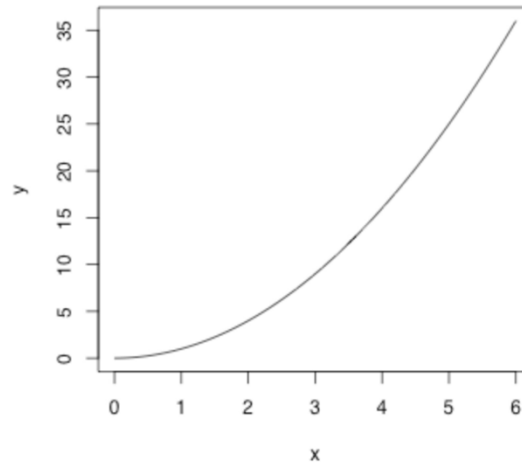
Application soit la fonction définie par les points suivant:

X	Y
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

- 1) Tracer la fonction
- 2) Tracer sa dérivée
- 3) Conclure

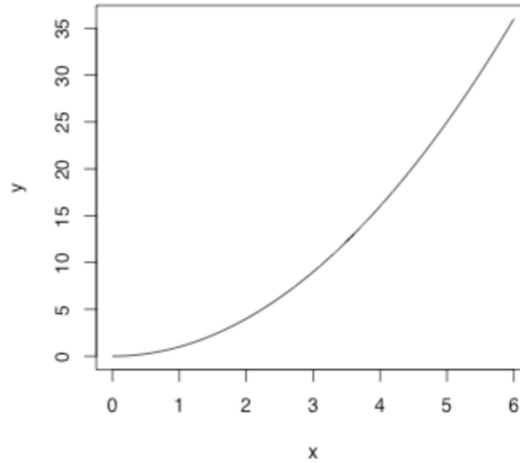
II. Théorème des accroissements finis

1) Tracer la fonction



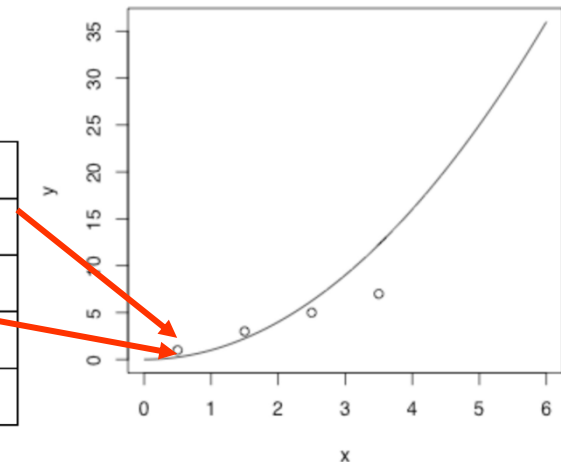
II. Théorème des accroissements finis

1) Tracer la fonction



2) Tracer sa dérivée : Les points ont pour valeurs :

$(X1, Y1)$ $(X2, Y2)$	$C1$	$F'(C1)$
$(0,0)$ $(1,1)$	$(X1+X2)/2=0.5$	$(Y2-Y1)/(X2-X1)=1$
$(1,1)$ $(2,4)$	1.5	3
$(2,4)$ $(3,9)$	2.5	5
$(3,9)$ $(4,16)$	3.5	7



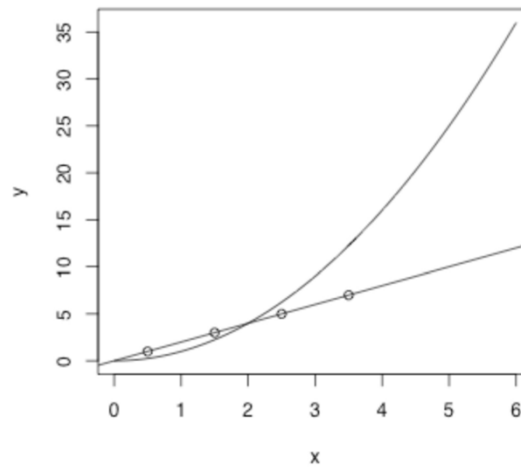
II. Théorème des accroissements finis

3) Conclusion:

$$f(x)=x^2$$

$$f'(x)=2x$$

Vérification :



III. Théorème des accroissements finis généralisés

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions définies et **continues** sur $[a,b]$, **dérivables** sur $]a,b[$. Si $g'(x)$ ne s'annule pas, il existe une valeur c appartenant à $]a,b[$ telle que
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Conséquence: Règle de l'HOSPITAL

Soient 2 fonctions $f(x)$ et $g(x)$ telles que: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ **forme indéterminée**

Si les fonctions sont dérivables et si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ **limite finie** alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad (\text{réciproque fausse})$$

III. Théorème des accroissements finis généralisés

Remarque : Itération du procédé

Si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{0}{0}$ forme indéterminée, et si $f'(x)$ et $g'(x)$ dérivables,

on calcule les dérivées secondes:

si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$ et ainsi de suite....

Application :

Calculer les limites des fonctions suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1 - x}$$

III. Théorème des accroissements finis généralisés

Correction :

* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + 3x}$, on a bien une forme indéterminée 0/0

or $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2x + 3} = \frac{1}{3}$ donc en appliquant la règle de l'Hospital

on obtient : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x^2 + 3x} = \frac{1}{3}$

* $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{1-x}$

Règle de l'Hospital

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = -1$

IV. Sens de variation des fonctions

Soit la fonction $f(x)$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.

Sens de variation de la fonction: étude du **signe du taux de variation**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ au voisinage de } x_0.$$

Par application du théorème des accroissements finis, on démontre que l'on peut remplacer l'étude du signe de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ par l'étude du signe de la dérivée $f'(x_0)$.

Théorème 1

Si f est fonction **constante** sur $[a,b]$, alors $f'(x)=0 \quad \forall x \in]a,b[$

Si f est fonction **croissante** sur $[a,b]$, alors $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

Si f est fonction **décroissante** sur $[a,b]$, alors $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

IV. Sens de variation des fonctions

car
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Théorème 2

Si $f'(x)=0 \forall x \in]a,b[$, alors f est **constante** sur $[a,b]$

Si $f'(x) \geq 0 \forall x \in]a,b[$, alors f est **croissante** sur $[a,b]$

Si $f'(x) \leq 0 \forall x \in]a,b[$, alors f est **décroissante** sur $[a,b]$

car
$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \quad c \in]x_1, x_2[$$

Remarque : Quand la fonction est croissante ou décroissante, la dérivée première peut s'annuler en des points isolés = points à **tangente horizontale**.

IV. Sens de variation des fonctions

Extremum

* Si $f(x)$ présente un **extremum** pour $x=x_0$ et si $f'(x_0)$ existe, alors **$f'(x_0)=0$**

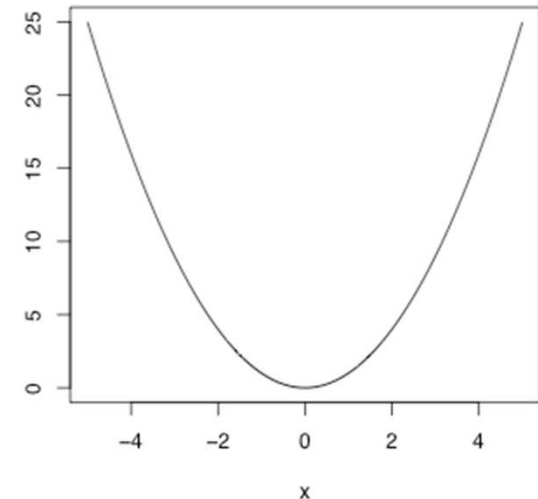
* x_0 est un extremum de $f(x)$ si:

a. la dérivée s'annule pour $x=x_0$: **$f'(x_0)=0$**

b. la dérivée **$f'(x)$ change de signe au voisinage de x_0** pour $x < x_0$ et $x > x_0$.

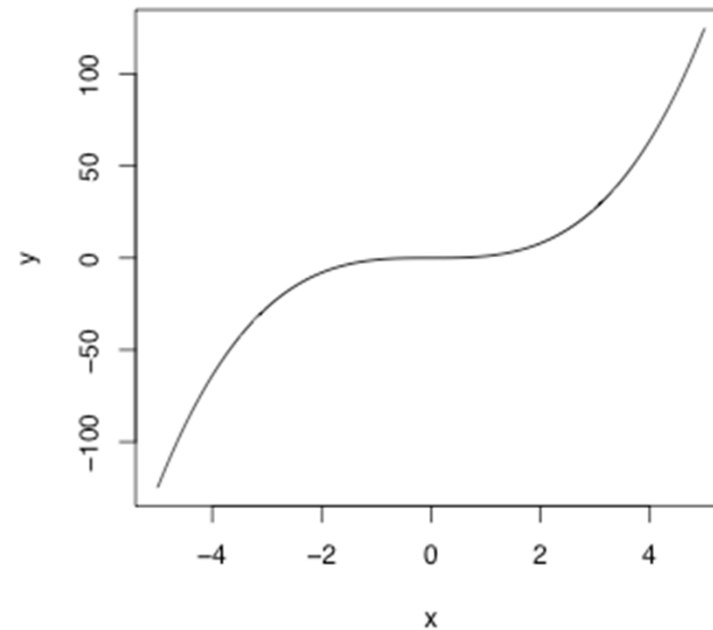
• $y=x^2$ dérivée première $y' = 2x$ s'annule **avec changement de signe** pour $x_0=0$.

⇒ la fonction $y=x^2$ présente un **extremum** en $x_0=0$;
En ce point $y_0=0$ (minimum).



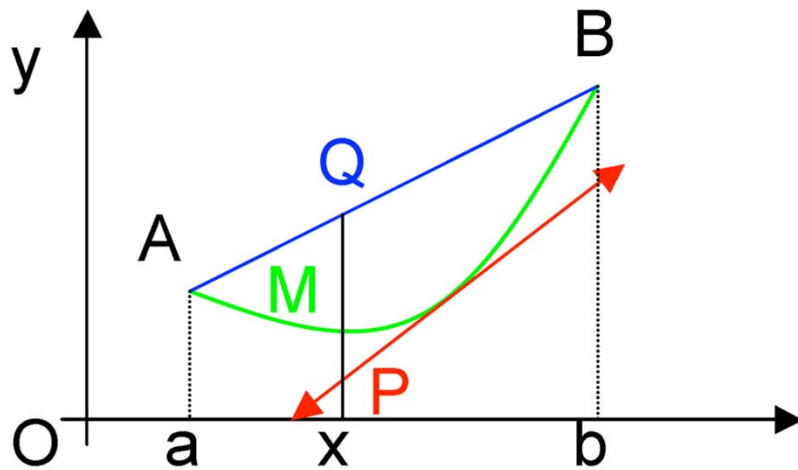
IV. Sens de variation des fonctions

- $y=x^3$ dérivée première $y'=3x^2$ s'annule **sans changement de signe** pour $x_0=0$.
- ⇒ la fonction $y=x^3$ présente un **point** ($x_0=0$; $y_0=0$) à **tangente horizontale**.



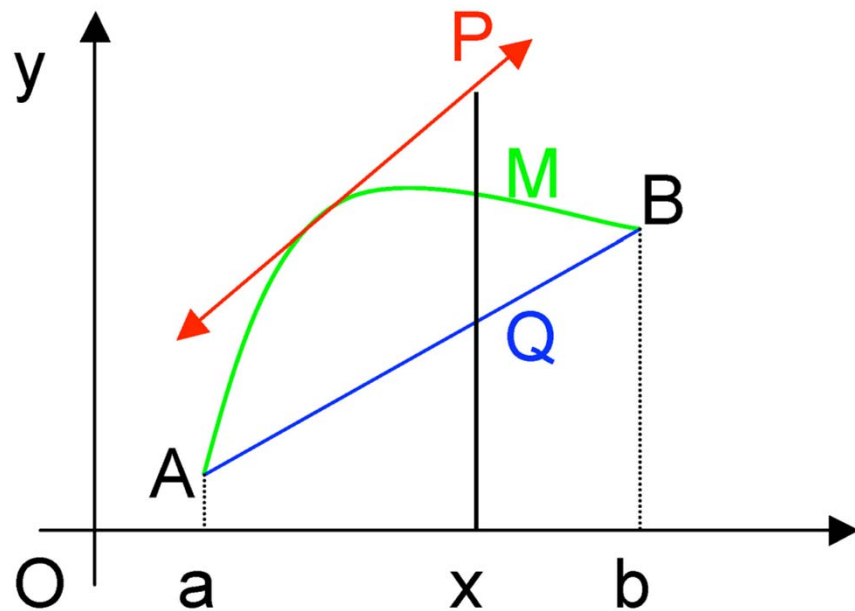
V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

a. Concavité - Convexité



L'arc AB tourne sa concavité vers les y positifs s'il est situé en dessous de la corde AB avec $\overline{MQ} > 0$. f est alors dite **convexe sur $[a, b]$**
L'arc AB est alors **situé au dessus de toute tangente** avec $\overline{PM} > 0$.

V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe



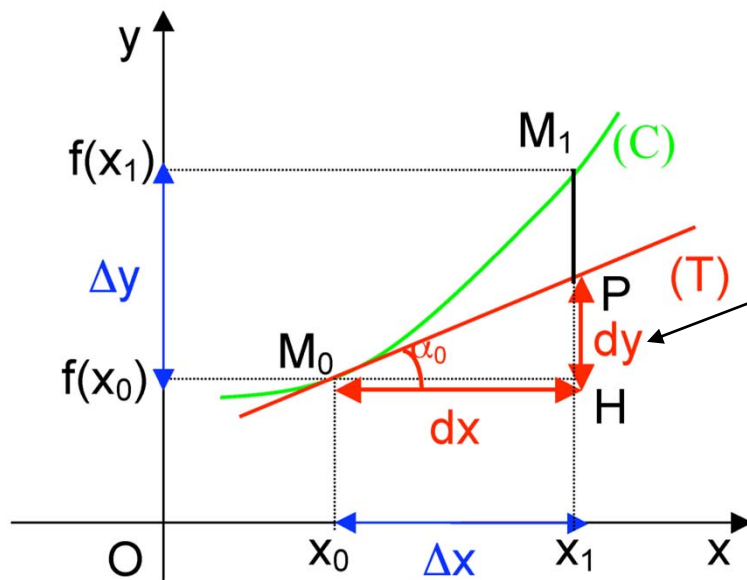
L'arc AB tourne sa concavité vers les y négatifs s'il est situé au dessus de la corde AB avec $\overline{MQ} < 0$. **f** est alors dite **concave sur [a,b]**
L'arc AB est alors situé en dessous de toute tangente avec $\overline{PM} < 0$.

V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

b. Intérêt su signe de la dérivée seconde

Soit la fonction $f(x)$ définie sur $[x_0, x_1]$, continue et **dérivable à l'ordre 2** sur cet intervalle .

$$\Delta x = dx = x_1 - x_0 \text{ et } \Delta y = \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

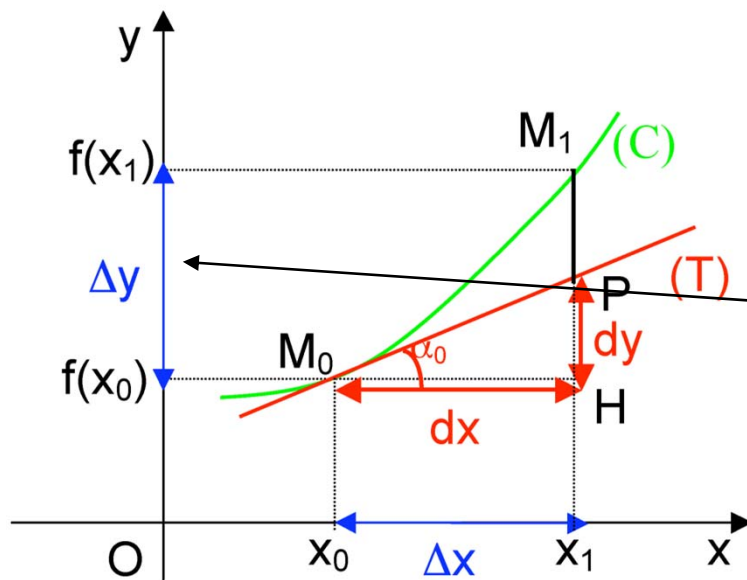


$$* \overline{HP} = dy = f'(x_0) dx = (x_1 - x_0) f'(x_0)$$

V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

b. Intérêt su signe de la dérivée seconde

Soit la fonction $f(x)$ définie sur $[x_0, x_1]$, continue et **dérivable à l'ordre 2** sur cet intervalle .



$$\Delta x = dx = x_1 - x_0 \text{ et } \Delta y = \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

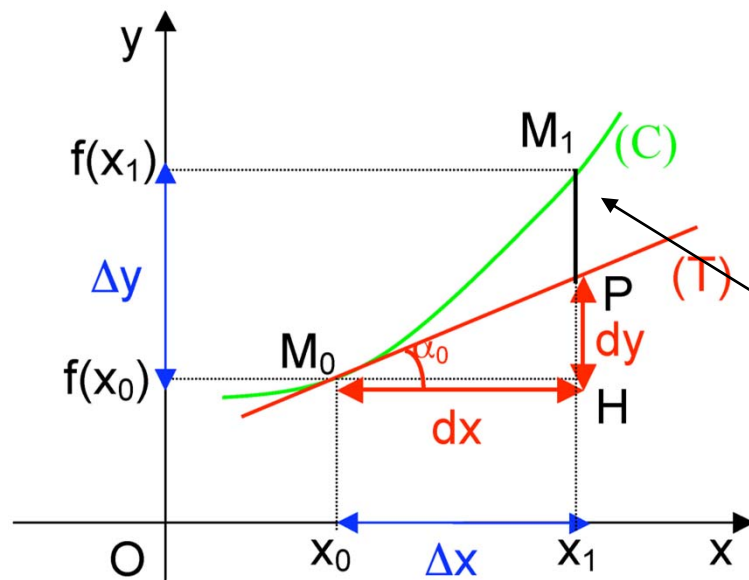
$$* \quad \overline{HP} = dy = f'(x_0) dx = (x_1 - x_0) f'(x_0)$$

$$* \quad \overline{HM_1} = \Delta y = f(x_1) - f(x_0)$$

V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

b. Intérêt su signe de la dérivée seconde

Soit la fonction $f(x)$ définie sur $[x_0, x_1]$, continue et **dérivable à l'ordre 2** sur cet intervalle .



$$\Delta x = dx = x_1 - x_0 \text{ et } \Delta y = \Delta f = f(x_1) - f(x_0)$$

$$* \quad \overline{HP} = dy = f'(x_0) dx = (x_1 - x_0) f'(x_0)$$

$$* \quad \overline{HM_1} = \Delta y = f(x_1) - f(x_0)$$

$$* \quad \overline{PM_1} = \Delta y - dy = \varepsilon(x) \Delta x$$

$$\overline{PM_1} = [f(x_1) - f(x_0)] - [(x_1 - x_0) f'(x_0)]$$

V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

- 1ère utilisation du th. des accroissements finis

$$\exists c \in]x_0, x_1[\text{ tel que } f(x_1) - f(x_0) = (x_1 - x_0) f'(c)$$

$$\overline{PM}_1 = [(x_1 - x_0) f'(c)] - [(x_1 - x_0) f'(x_0)] = (x_1 - x_0) [f'(c) - f'(x_0)]$$

- 2ème utilisation du th. des accroissements finis

$$\exists d \in]x_0, c[\text{ tel que } f'(c) - f'(x_0) = (c - x_0) f''(d)$$

$$\overline{PM}_1 = (x_1 - x_0) (c - x_0) f''(d) \text{ avec } (x_1 - x_0) (c - x_0) > 0$$

$$\text{signe de } \overline{PM}_1 = \text{signe de } f''(d) = \text{signe de } f''(x_0)$$

La recherche sur **sens de concavité** est donc ramenée à l'étude du **signe de la dérivée seconde**.

V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

Si f est dérivable à l'ordre 2, sa courbe représentative est :

- **convexe** sur $]a,b[$ si $\forall x \in]a,b[\quad f''(x) > 0$

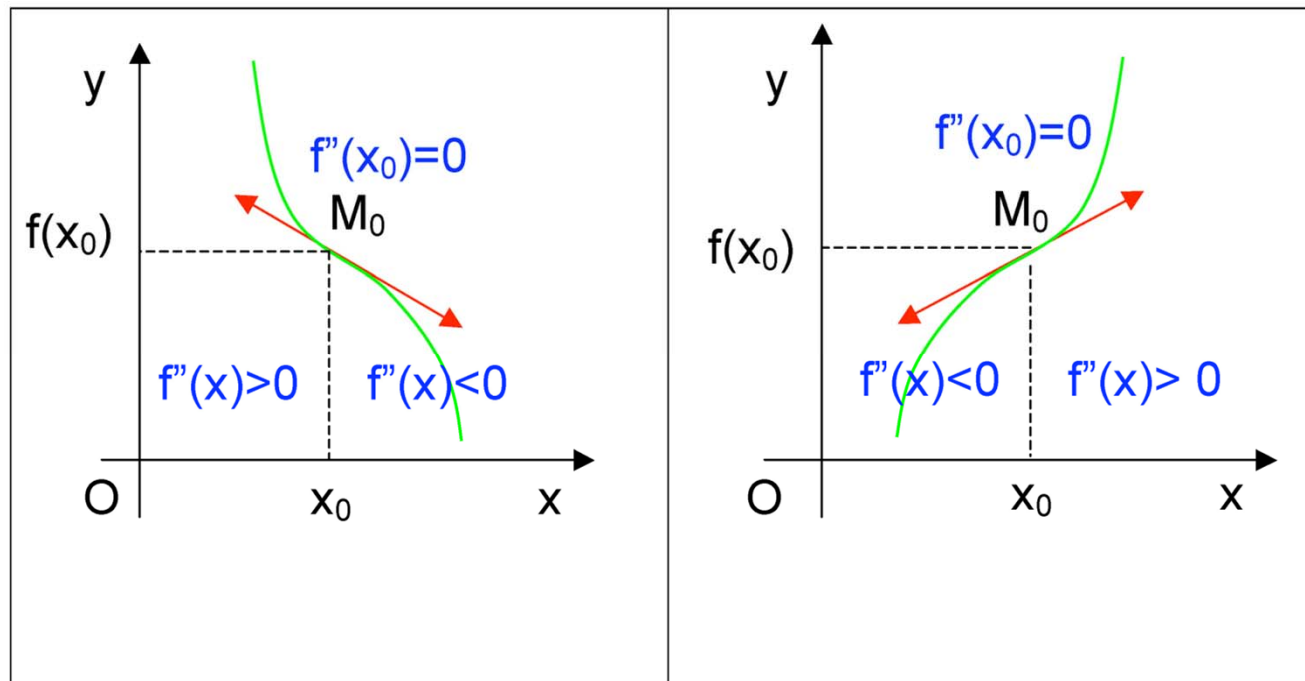
- **concave** sur $]a,b[$ si $\forall x \in]a,b[\quad f''(x) < 0$

De plus, si f'' s'annule en changeant de signe, la concavité change de sens : le point correspondant est un **point d'inflexion**.

V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

- **Courbes présentant un point d'inflexion M_0**

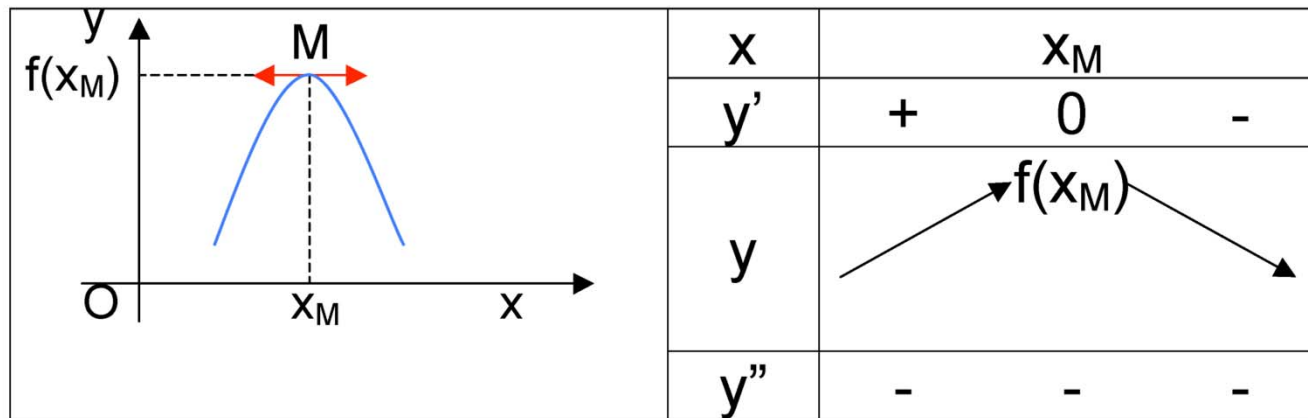
En M_0 , la courbe traverse sa tangente



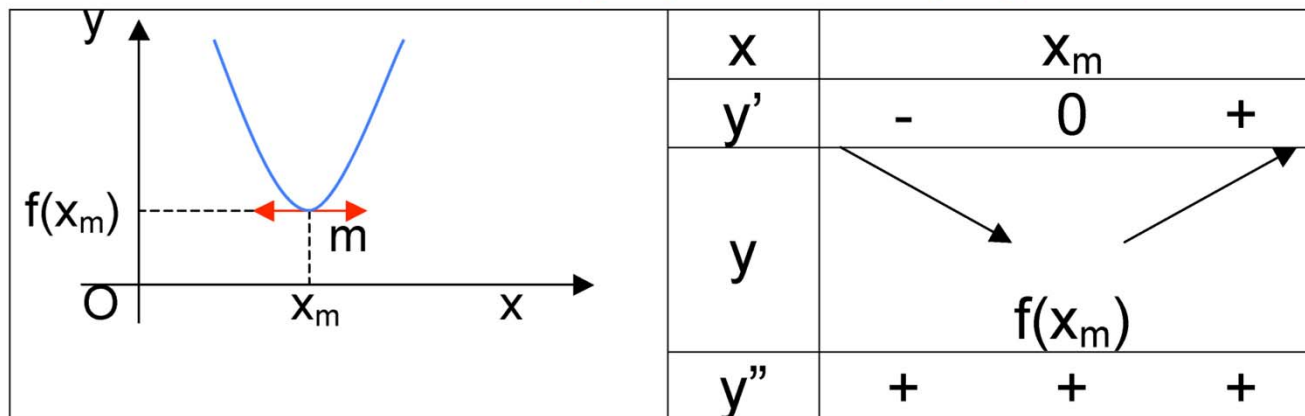
V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

- **Remarque:** signe de la dérivée seconde aux extremums

Maximum $f'(x_M)=0$ et $f''(x_M)<0$



Minimum $f'(x_m)=0$ et $f''(x_m)>0$



V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

Application :

Etudier les variations de la fonction définie par $f(x)=2x/(x+3)$.

Tracer son graphe.

V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

Application - Correction

1) $Df = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

2) f n'est ni paire ni impaire

3) points particuliers évident de la courbe :

$$f(0)=0 \text{ et } f'(0)=0 \text{ implique } x=0$$

4) $f'(x) = 6(x+3)^2 > 0$: donc f est strictement croissante sur Df

5) $f''(x) = -12(x+3)$, $f''(x)$ ne s'annule pas donc f n'admet pas de point d'inflexion.

Par contre, $f''(x) > 0$ sur $] -\infty, -3 [$ et $f''(x) < 0$ sur $] -3, +\infty [$ donc f est convexe sur $] -\infty, -3 [$ et concave sur $] -3, +\infty [$

V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

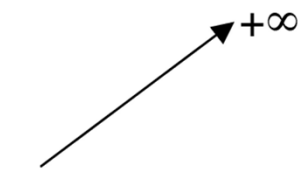
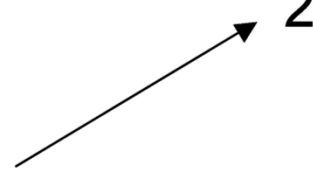
Application - Correction

6) Tableau de variation

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$$

X	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	2 	$+\infty$	$-\infty$ 

V. Signe de la dérivée secondes - concavité, convexité et points d'inflexion de la courbe

Application - Correction

7) la droite $y=2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et $-\infty$.

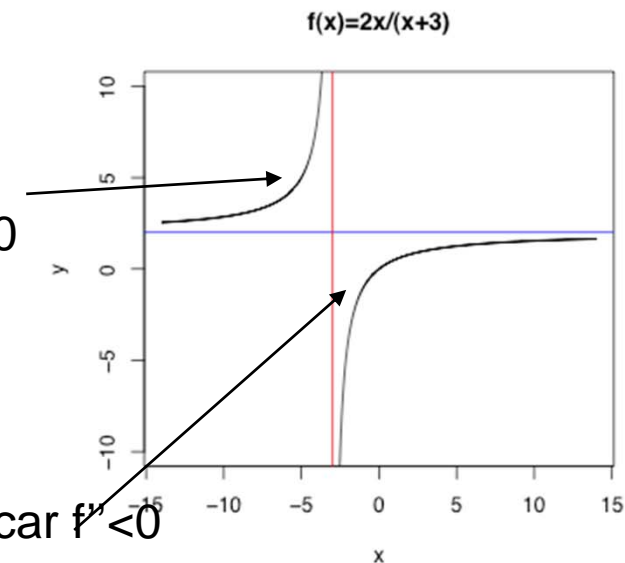
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2^-$ graphe en dessous de asymptote en $+\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2^-$ graphe au dessus de asymptote en $-\infty$

8) Représentation graphique :

Convexe car $f'' > 0$

Concave car $f'' < 0$



Mentions légales

L'ensemble de cette œuvre relève des législations française et internationale sur le droit d'auteur et la propriété intellectuelle, littéraire et artistique ou toute autre loi applicable.

Tous les droits de reproduction, adaptation, transformation, transcription ou traduction de tout ou partie sont réservés pour les textes ainsi que pour l'ensemble des documents iconographiques, photographiques, vidéos et sonores.

Cette œuvre est interdite à la vente ou à la location. Sa diffusion, duplication, mise à disposition du public (sous quelque forme ou support que ce soit), mise en réseau, partielles ou totales, sont strictement réservées à l'université Joseph Fourier (UJF) Grenoble 1 et ses affiliés.

L'utilisation de ce document est strictement réservée à l'usage privé des étudiants inscrits à l'Université Joseph Fourier (UJF) Grenoble 1, et non destinée à une utilisation collective, gratuite ou payante.