UE4 : Evaluation des méthodes d'analyses appliquées aux sciences de la vie et de la santé – Analyse

Chapitre 4 :

Différentielles des fonctions d'une variable réelle

Christelle MELODELIMA

Année universitaire 2011/2012

I. Définition et théorème fondamental

a. Définition

Soit la fonction f(x) définie sur [a,b], continue en x_0 et **dérivable en x_0** :

$$\Leftrightarrow \quad f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\left[f'(x_0) + \varepsilon(x)\right] \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

en remplaçant : $\boldsymbol{\Delta x} = x - x_0$ et $\boldsymbol{\Delta y = \Delta f} = f(x) - f(x_0)$

$$\Delta y = \Delta x.\left[f'(x_0) + \varepsilon(x)\right] \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\Delta y = \boldsymbol{\Delta x.f'(x_0)} + \Delta x.\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

- Par définition, $\Delta x.f'(x_0)$ est la **différentielle de f en x_0** notée df_{X0} :

$$\boldsymbol{df_{X0} = \Delta x \,.\, f'(x_0) = dx \,.\, f'(x_0)}$$

I. Définition et théorème fondamental

- Par <u>définition</u>, $\Delta x.f'(x_0)$ est la **différentielle de f en x_0** notée df_{X0} :

$$df_{X0} = \Delta x \, . \, f'(x_0) = dx \, . \, f'(x_0)$$

Δx est un accroissement infiniment petit de x (indépendant de x).
Il peut aussi être noté **dx** .
mais **$\Delta f = \Delta y$** et **df=dy** sont deux grandeurs différentes

- **Conséquence:**

$$\Delta y = dy + \Delta x \, . \, \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\Delta f = df + \Delta x \, . \, \varepsilon(x) \qquad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

- D'une manière générale: **différentielle de f en x**

$$df = dy = f'(x)\, dx \qquad \forall \text{ x où f est dérivable}$$

I. Définition et théorème fondamental

Application :

Calculer la différentielle des fonctions suivantes :

y=sin(x)

$$y = \sqrt{x}$$

I. Définition et théorème fondamental

Application - Correction

* $y = \sin(x) \Rightarrow dy = \cos(x)dx$

* $y = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx$

I. Définition et théorème fondamental

Notation de Leibniz de la dérivée

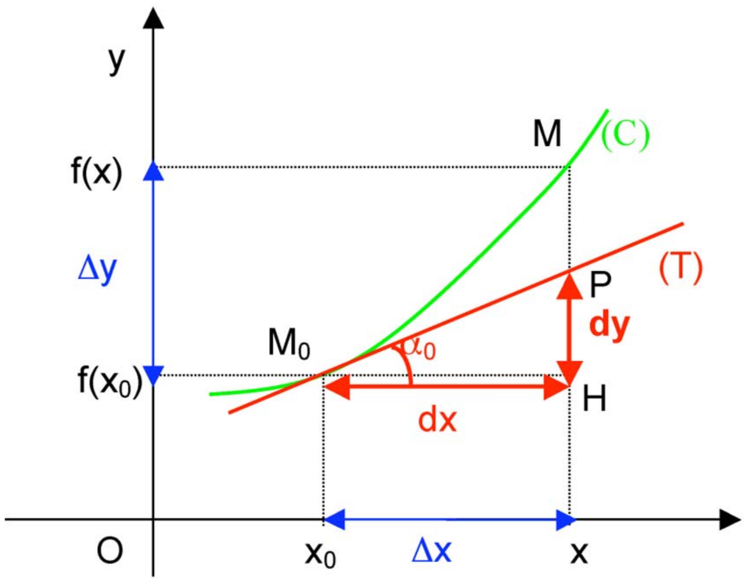
$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'(x)}$$

I. Définition et théorème fondamental

Notation de Leibniz de la dérivée

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'(x)}$$

b. Interprétation géométrique



* Coefficient directeur de la tangente (T) (repère orthonormé):

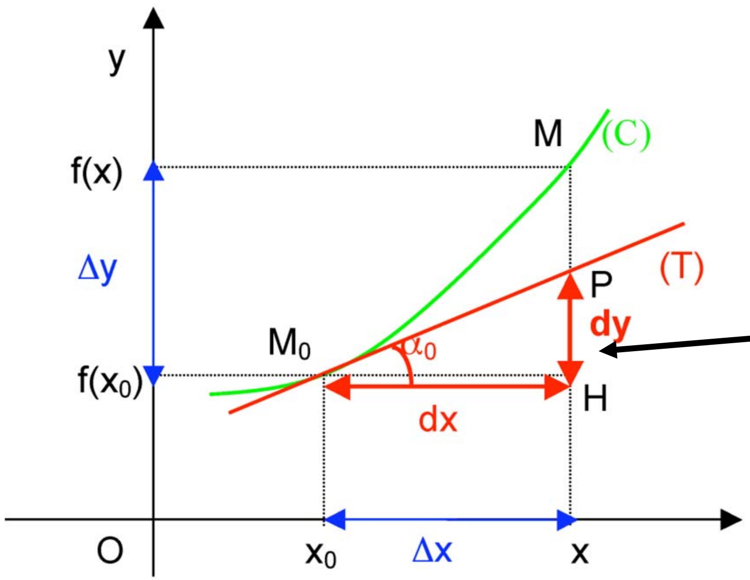
$$\tan \alpha_0 = \frac{\overline{HP}}{\overline{M_0H}} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x_0)$$

I. Définition et théorème fondamental

Notation de Leibniz de la dérivée

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'(x)}$$

b. Interprétation géométrique



* Coefficient directeur de la tangente (T) (repère orthonormé):

$$\tan \alpha_0 = \frac{\overline{HP}}{\overline{M_0H}} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x_0)$$

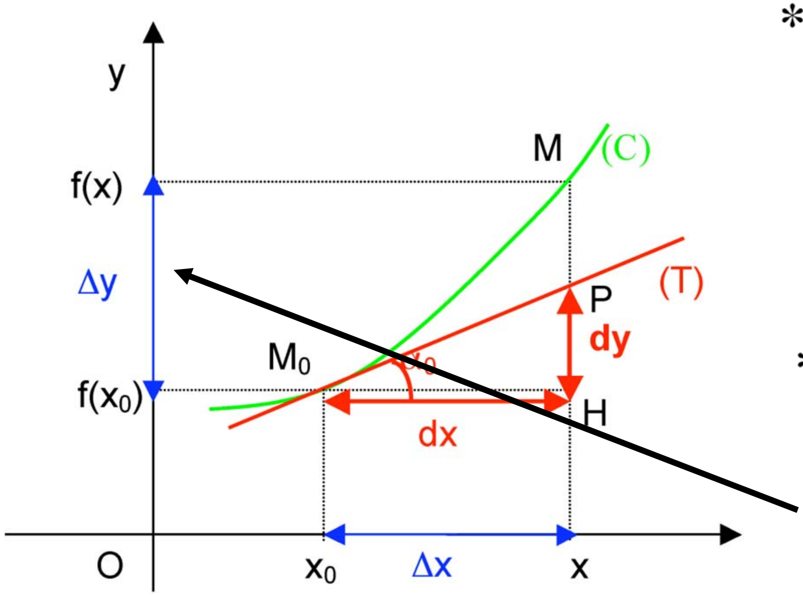
* $\overline{HP} = dy = f'(x_0)dx$

I. Définition et théorème fondamental

Notation de Leibniz de la dérivée

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'(x)}$$

b. Interprétation géométrique



* Coefficient directeur de la tangente (T) (repère orthonormé):

$$\tan \alpha_0 = \frac{\overline{HP}}{\overline{M_0H}} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x_0)$$

* $\overline{HP} = dy = f'(x_0)dx$

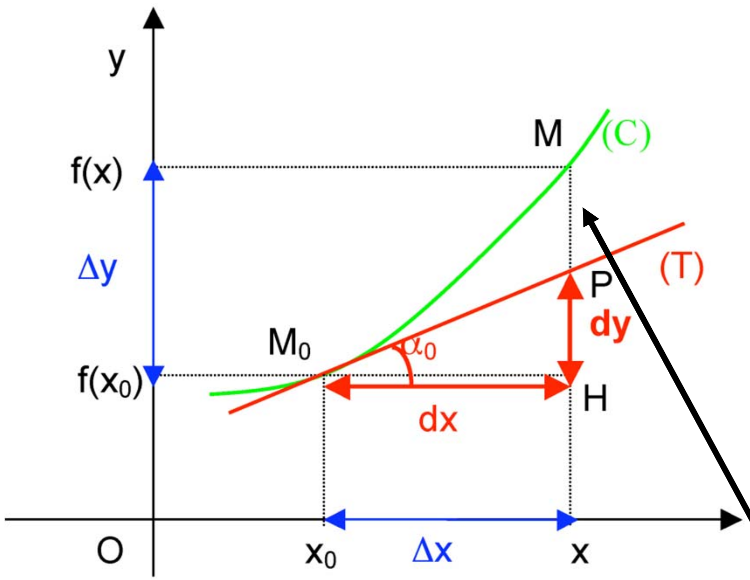
* $\overline{HM} = \Delta y = f(x) - f(x_0)$

I. Définition et théorème fondamental

Notation de Leibniz de la dérivée

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'(x)}$$

b. Interprétation géométrique



* Coefficient directeur de la tangente (T) (repère orthonormé):

$$\tan \alpha_0 = \frac{\overline{HP}}{\overline{M_0H}} = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = f'(x_0)$$

* $\overline{HP} = dy = f'(x_0)dx$

* $\overline{HM} = \Delta y = f(x) - f(x_0)$

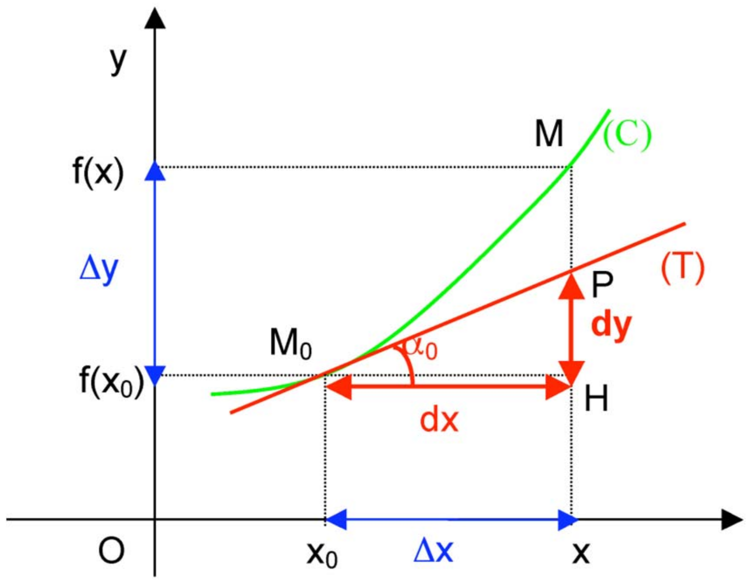
* $\overline{PM} = \Delta y - dy = \varepsilon(x)\Delta x$

I. Définition et théorème fondamental

Notation de Leibniz de la dérivée

$$\boxed{f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = y'(x)}$$

b. Interprétation géométrique



Pour une variation Δx de la variable:

Δy variation sur la **courbe**

dy variation sur la **tangente**

à la courbe en M_0

I. Définition et théorème fondamental

c. Théorème fondamental

Si $f'(x_0) \neq 0$, Δy et dy sont deux infiniment petits équivalents **quand Δx tend vers 0**.

On démontre que: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$

$$\Delta y = \boldsymbol{\Delta x . f'(x_0)} + \Delta x.\varepsilon(x) = \boldsymbol{dy} + \Delta x.\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\varepsilon(x)\Delta x}{f'(x_0)\Delta x} = 1 + \frac{\varepsilon(x)}{f'(x_0)} \quad \text{avec} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon(x) = 0 \quad \text{et} \quad f'(x_0) \neq 0$$

Donc $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$

La différentielle **dy** réalise une **approximation** de la variation de la fonction **Δy** (quand **Δx** est très petit)

I. Définition et théorème fondamental

Exemple :

Comparaison de **Δy** et **dy** pour la fonction **$y = f(x) = x^2$**

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

avec $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2 = f(x) + 2x.\Delta x + (\Delta x)^2$

$$\Delta y = 2x.\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$dy = f'(x)\, dx = 2x\, dx$$

Si Δx très petit : $\Delta x = dx \Rightarrow 2x\Delta x = 2x.dx = dy$

$$\Delta y = dy + (\Delta x)^2$$

$\Delta y \approx dy$ si $(\Delta x)^2$ négligeable devant $2x\Delta x$ = **quand $\Delta x \rightarrow 0$**

II. Différentielle d'ordre supérieur

Soit la fonction f(x) dérivable à l'ordre n

∗ Différentielle (d'ordre 1) $\mathbf{dy = f'(x)\, dx}$

∗ Différentielle d'ordre 2

$$d(dy) = d[f'(x)dx] = [f''(x)\, dx].dx = f''(x).[dx]^2$$

$$\mathbf{d^2y = f''(x).dx^2}$$

∗ Différentielle d'ordre n $\mathbf{d^ny = f^{(n)}(x).dx^n}$

⇒ Notation des dérivées successives de f(x)

$$f'(x) = \frac{df}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d\left[f'(x)\right]}{dx} = \frac{d^2f}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \boxed{f^{(n)}(x) = \frac{d^nf}{dx^n}}$$

III. Opérations sur les fonctions différentiables

Soient les fonctions différentiables f(x) et g(x) de différentielles:

$$df = f'(x).dx \quad \text{et} \quad dg = g'(x).dx$$

a. Somme de fonctions

$\mathbf{d(f+g)} = [f(x)+g(x)]'.dx = [f'(x)+g'(x)].dx$

$= f'(x).dx + g'(x).dx = \mathbf{df + dg}$

b. Multiplication par un scalaire

Soit le scalaire $\lambda \in \Re$

$\mathbf{d[\lambda f]} = [\lambda f]'.dx = [\lambda\, f'(x)].dx = \boldsymbol{\lambda}\ \mathbf{df}$

III. Opérations sur les fonctions différentiables

Soient les fonctions différentiables f(x) et g(x) de différentielles:

df = f'(x).dx   et dg = g'(x).dx

c. Produit de fonctions

d[f.g] = [f(x).g(x)]'.dx = [f'(x).g(x) + f(x).g'(x)].dx

= f'(x).g(x).dx + f(x).g'(x).dx = **g.df + f.dg**

d. Quotient de fonctions

$$\mathbf{d}\left[\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right]=\left[\frac{f}{g}\right]' .dx=\frac{f'g-fg'}{g^2}.dx=\frac{g.f'dx-f.g'dx}{g^2} \quad \text{avec } g(x)\neq 0$$

$$\mathbf{d}\left[\frac{\mathbf{f}}{\mathbf{g}}\right]=\frac{gdf-fdg}{g^2} \quad \forall\ x \text{ tel que } g(x)\neq 0$$

IV. Différentielle logarithmique (DIF. LOG)

a. Définition

Soit f(x) fonction différentiable.
En tout x où $f(x) \neq 0$, la fonction $\ln|f(x)|$ est différentiable.

On appelle **différentielle logarithmique de f(x)**, la **différentielle de** $\mathbf{\ln|f(x)|}$:

$$\boxed{d\left[\ln|f(x)|\right] = \left[\ln|f(x)|\right]'.dx = \frac{f'(x).dx}{f(x)} = \frac{df}{f}} \quad \forall\ x \text{ tel que } \boxed{f(x) \neq 0}$$

Exemple : Calculer la différentielle logarithmique des fonctions suivantes

$f(x) = e^{\sin(x)}$

g(x)=2x+1

IV. Différentielle logarithmique (DIF. LOG)

$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

$$d(\ln(f(x))) = \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \frac{\cos(x)e^{\sin(x)}dx}{e^{\sin(x)}} = \cos x dx$$

Vérification :

$$y = e^{\sin(x)} \Rightarrow \ln(y) = \sin(x)$$

$$\Rightarrow d(\ln(y)) = d(\sin(x)) = \cos(x)dx$$

$$d(\ln(y)) = \frac{dy}{y} = \cos(x)dx$$

IV. Différentielle logarithmique (DIF. LOG)

g(x)=2x+1

$$d(\ln(g(x))) = \frac{g'(x)dx}{g(x)} = \frac{2}{2x+1}dx$$

IV. Différentielle logarithmique (DIF. LOG)

b. Propriétés

Soients f(x) et g(x) différentiables, avec $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$.

Différentielles logarithmiques: $d\left[\ln|f|\right] = \dfrac{df}{f}$ et $d\left[\ln|g|\right] = \dfrac{dg}{g}$

* Produit de fonctions

$y(x) = f(x).g(x) \Rightarrow \ln|y(x)| = \ln|f(x)| + \ln|g(x)|$

$d\left[\ln|y(x)|\right] = d\left[\ln|f(x)|\right] + d\left[\ln|g(x)|\right]$ $\boxed{\dfrac{dy}{y} = \dfrac{df}{f} + \dfrac{dg}{g}}$

DIF. LOG. du produit = <u>somme</u> des DIF. LOG.

IV. Différentielle logarithmique (DIF. LOG)

b. Propriétés

Soient f(x) et g(x) différentiables, avec $f(x) \neq 0$ et $g(x) \neq 0$.

Différentielles logarithmiques: $d\left[\ln|f|\right] = \dfrac{df}{f}$ et $d\left[\ln|g|\right] = \dfrac{dg}{g}$

∗ Quotient de fonctions

$$y(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \Rightarrow \quad \ln|y(x)| = \ln|f(x)| - \ln|g(x)|$$

$$d\left[\ln|y(x)|\right] = d\left[\ln|f(x)|\right] - d\left[\ln|g(x)|\right] \qquad \boxed{\frac{dy}{y} = \frac{df}{f} - \frac{dg}{g}}$$

DIF. LOG. du quotient = <u>différence</u> des DIF. LOG.

V. Applications des différentielles et différentielles logarithmique

D'après le théorème fondamental, si **Δx très petit :**

a. la différentielle **dy** réalise une approximation de la variation de la fonction **Δy** quand x varie de **Δx**

b. la différentielle logarithmique $\boxed{d\left[\ln\left|y\right|\right] = \dfrac{dy}{y}}$ réalise une approximation de la variation relative de la fonction $\boxed{\dfrac{\Delta y}{y}}$ quand x varie de **Δx**

(utilisable si y sous forme de produit, quotient, puissance)

C'est la base des **calculs d'incertitudes en physique**

Med@TICE
Université Joseph Fourier Grenoble 1
ETUDES DE SANTÉ
Première Année Commune

www.medatice-grenoble.fr

Mentions légales

Ce document a été réalisé par la Cellule TICE de la Faculté de Médecine et de Pharmacie de Grenoble
(Université Joseph Fourier – Grenoble 1)