Med@TICE
Université Joseph Fourier Grenoble 1
ETUDES DE SANTÉ
Première Année Commune

www.medatice-grenoble.fr

UE4 : Evaluation des méthodes d'analyses appliquées aux sciences de la vie et de la santé – Analyse

Chapitre 2 :

Fonction réciproque

Christelle MELODELIMA

Année universitaire 2011/2012

I. Définitions

Soit une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle [a,b] de $\Re$. Elle prend, une fois et une seule, toute valeur réelle comprise entre f(a) et f(b).

I. Définitions

Soit une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle [a,b] de $\Re$. Elle prend, une fois et une seule, toute valeur réelle comprise entre f(a) et f(b).

On dit que **f** est une **bijection** de l'intervalle **[a,b]** sur l'intervalle **[f(a),f(b)]**. Elle admet donc une **bijection réciproque** $\mathbf{f^{-1}}$ de l'intervalle **[f(a),f(b)]** sur l'intervalle **[a,b]** .

I. Définitions

Soit une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle [a,b] de $\Re$. Elle prend, une fois et une seule, toute valeur réelle comprise entre f(a) et f(b).

On dit que **f** est une **bijection** de l'intervalle **[a,b]** sur l'intervalle **[f(a),f(b)]**. Elle admet donc une **bijection réciproque** $\mathbf{f^{-1}}$ de l'intervalle **[f(a),f(b)]** sur l'intervalle **[a,b]** .

$$\boxed{y = f(x) \ \forall\, x \in I} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = f^{-1}(y) \ \forall\, y \in f(I)}$$

Par extension, l'intervalle I peut être ouvert ou semi-ouvert.

II. Propriétés

1. $f^{-1} o f$ est l'application de l'intervalle I sur lui-même car

$$f^{-1}[\, f(x)\,] = x \quad \forall\, x \in I$$

2. $f \, o \, f^{-1}$ est l'application de l'intervalle f(I) sur lui-même car

$$f\,[\, f^{-1}(y)] = y \quad \forall\, y \in f(I)$$

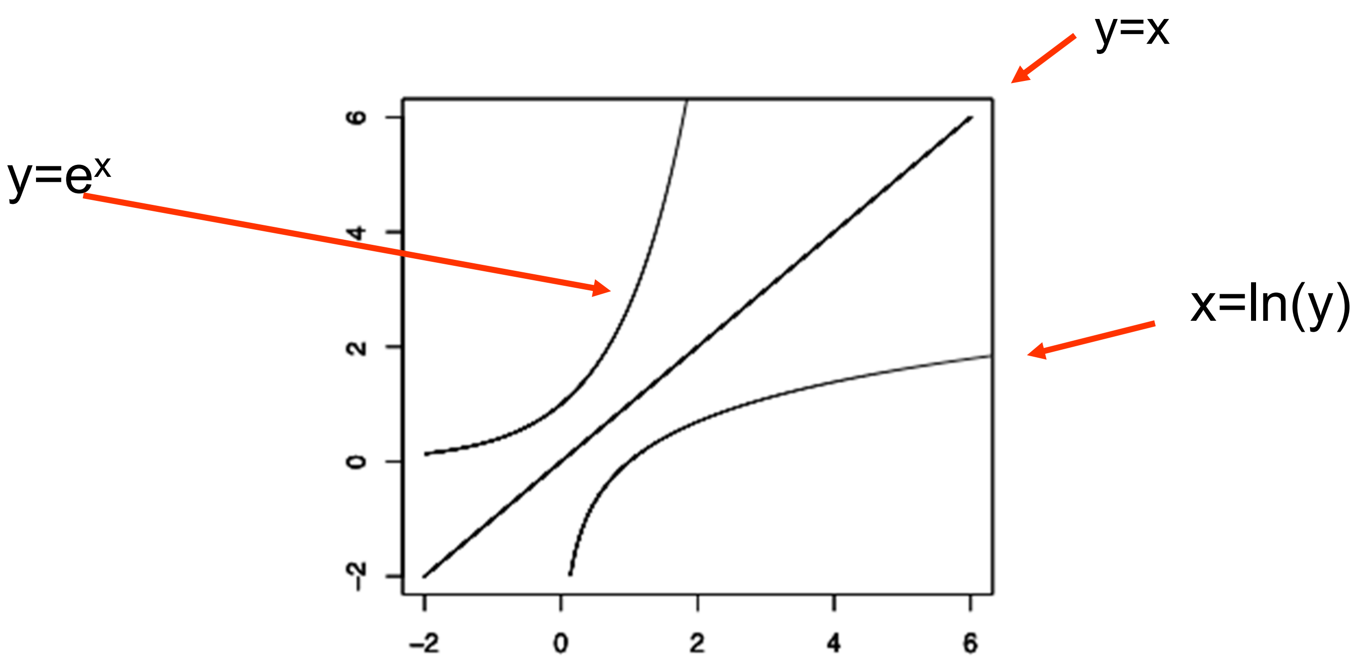
3. Si f est continue strictement monotone sur un intervalle I (borné ou non), f admet une fonction réciproque f^{-1} **continue strictement monotone** sur f(I) et **variant dans le même sens que f**.

II. Propriétés

4. Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.
Pour la représentation graphique, on écrit la fonction réciproque sous la forme Y = $f^{-1}(X)$.

II. Propriétés

4. Dans un <u>repère orthonormé</u>, les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes.
Pour la représentation graphique, on écrit la fonction réciproque sous la forme Y = $f^{-1}(X)$.



II. Propriétés

Exemple :

Déterminer la bijection **réciproque de la fonction :**

$$f : R - \{2\} \rightarrow R - \{1\}$$
$$x \rightarrow \frac{x+1}{x-2}$$

II. Propriétés

Correction :

F est une bijection, de bijectoin réciproque g déginie par :

$$g : R - \{1\} \to R - \{2\}$$
$$y \to \frac{2y+1}{y-1}$$

Car :

$$y = \frac{x+1}{x-2} \Leftrightarrow y(x-2) = x+1$$
$$\Leftrightarrow yx - 2y = x+1$$
$$\Leftrightarrow x(y-1) = 2y+1$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{2y+1}{y-1}$$

II. Propriétés

- Application :

Exercice : Pour chacune des fonctions suivantes :

- Prouver que ce sont des bijections de I sur un intervalle J à préciser.
- Donner leur bijection réciproque.

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ avec $I =]-1,+\infty[$

b) $g(x) = (x-5)^2 + 4$ avec $I =]-\infty,5]$

c) $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ avec $I = R$

II. Propriétés

- Correction :

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-2}{x+1} \text{ avec } I = \left]-1,+\infty\right[$$

f est une bijection car :

$$f'(x) = \frac{x+1-x+2}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur I, de plus, f est continue sur I ce qui implique par le théorème de la bijection que f est une bijection de I sur J=f(I).

II. Propriétés

- Correction :

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-2}{x+1} \text{ avec } I = \left]-1,+\infty\right[$$

Calcul de J :

$$\lim f(x)_{x\to -1^+} = \frac{-3}{0} = -\infty$$

$$\lim f(x)_{x\to +\infty} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1-2/x}{1+1/x} = 1$$

$$\text{donc } J = \left]-\infty,1\right[$$

$$\boxed{\text{Avec } f^{-1} : \left]-\infty,1\right[\to \left]-1,+\infty\right[}$$

II. Propriétés

- Correction :

a) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ avec $I = \left]-1, +\infty\right[$

Calcul de la fonction réciproque :

$$y = \frac{x-2}{x+1} \Leftrightarrow y(x+1) = x-2$$

$$\Leftrightarrow yx + y = x - 2$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = -y-2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-y-2}{y-1} = \boxed{\frac{y+2}{1-y}} \text{car } x \neq 1$$

II. Propriétés

- Correction :

b) $g(x)=(x-5)^2+4$ avec $\mathrm{I}=\left]-\infty,5\right]$

g est une bijection car :

$$g'(x)=2(x-5)<0$$

Donc g est strictement décroissante sur I, de plus, g est continue sur I ce qui implique par le théorème de la bijection que g est une bijection de I sur J=g(I).

Calcul de J :

$$\lim g(x)_{x\to5^-}=4$$

$$\lim g(x)_{x\to-\infty}=+\infty$$

donc $J=\left[4,+\infty\right[$

$\boxed{\text{Avec } g^{-1}:\left[4,+\infty\right[\to\left]-\infty,5\right]}$

II. Propriétés

- Correction :

b) $g(x) = (x-5)^2 + 4$ avec $I =]-\infty, 5]$

Calcul de la fonction réciproque :

$$y = (x-5)^2 + 4 \Leftrightarrow (x-5)^2 = y-4$$

$$\Leftrightarrow x - 5 = -\sqrt{y-4} \qquad \textit{car } x - 5 < 0 \text{ pour } x \in I$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 5 - \sqrt{y-4}}$$

II. Propriétés

- Correction :

c) $h(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ avec $I = R$

h est une bijection car :

exp(x) croissante, -exp(-x) croissante (car exp(-x) décroissante)

Donc h est strictement croissante sur I, de plus, h est continue sur I ce qui implique par le théorème de la bijection que : hest une bijection de I sur J=h(I).

Calcul de J :

$$\lim h(x)_{x \to -\infty} = -\infty$$
$$\lim h(x)_{x \to +\infty} = +\infty$$

donc $J =]-\infty, +\infty[$

II. Propriétés

- Correction :

c) $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ avec $I = \mathbb{R}$

Calcul de la fonction réciproque :

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 2y$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow X^2 - 2yX - 1 = 0$$

$$\Delta = 4y^2 + 4 > 0$$

$$X1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \text{ impossible car } < 0$$

II. Propriétés

- Correction :

c) $h(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ avec $I = R$

$$X\ 2 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2+1}}{2} = y + \sqrt{y^2+1}$$

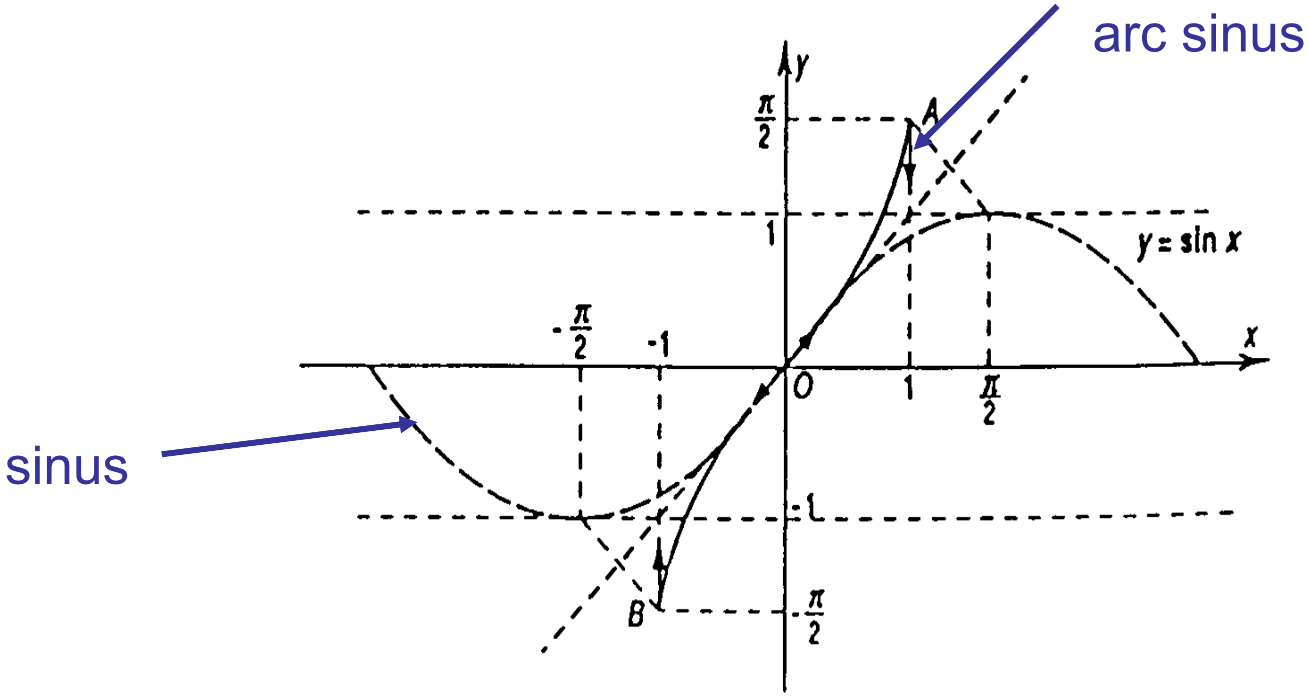
si $y>0$ $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = y$ donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

si $y<0$ $\sqrt{y^2+1} > \sqrt{y^2} = y$ donc $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$

Avec $h^{-1} : R \to R$

$h^{-1} : x \to \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

III. Fonction arc sinus

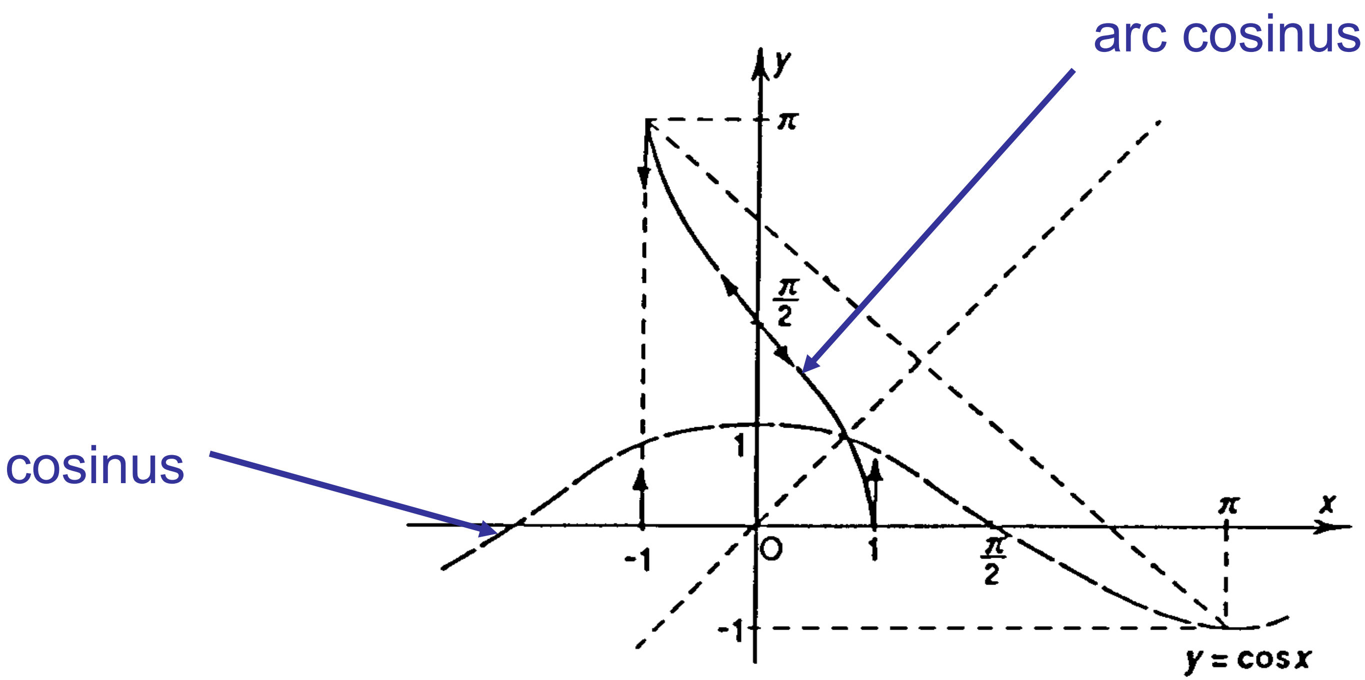


Fonction réciproque de la fonction SINUS qui est continue strictement croissante sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

$$y = \text{Arc}\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x = \sin y$$

$$\forall\, x \in [-1, +1] \qquad\qquad \forall\, y \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$$

IV. Fonction arc cosinus

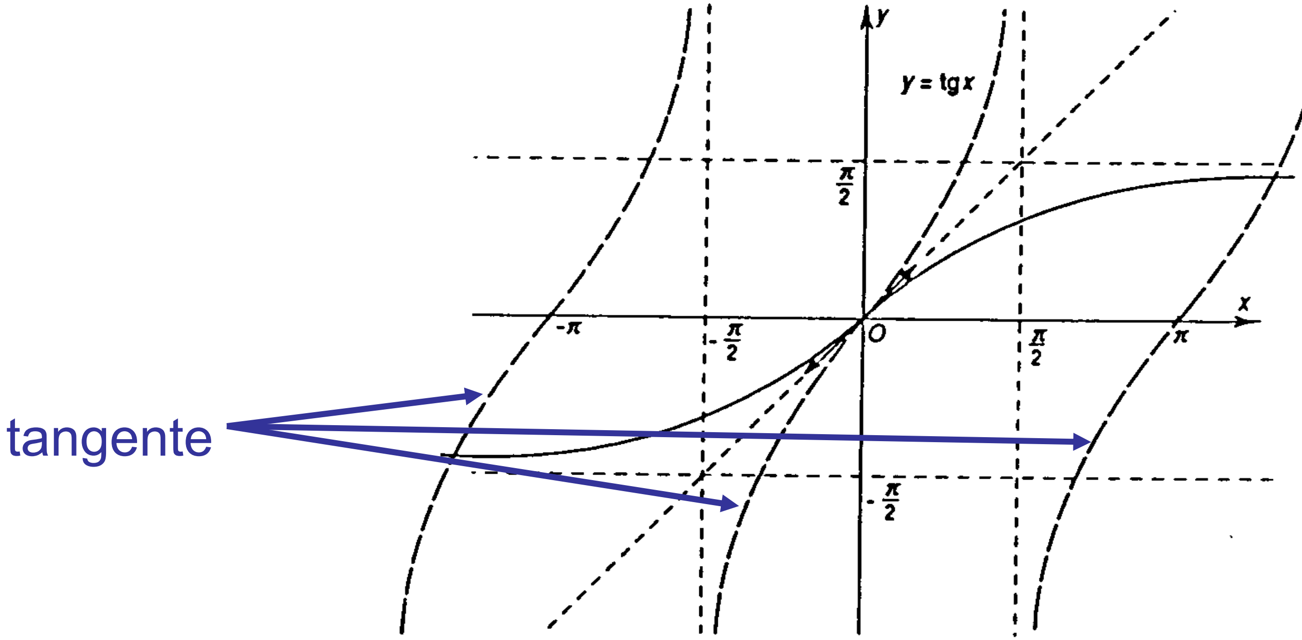


Fonction réciproque de la fonction COSINUS qui est continue strictement décroissante sur l'intervalle $[0 , \pi]$

$$y = \text{Arc}\cos x \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos y$$

$$\forall\, x \in [-1, +1] \qquad \forall\, y \in [0\ \pi]$$

v. Fonction arc tangente

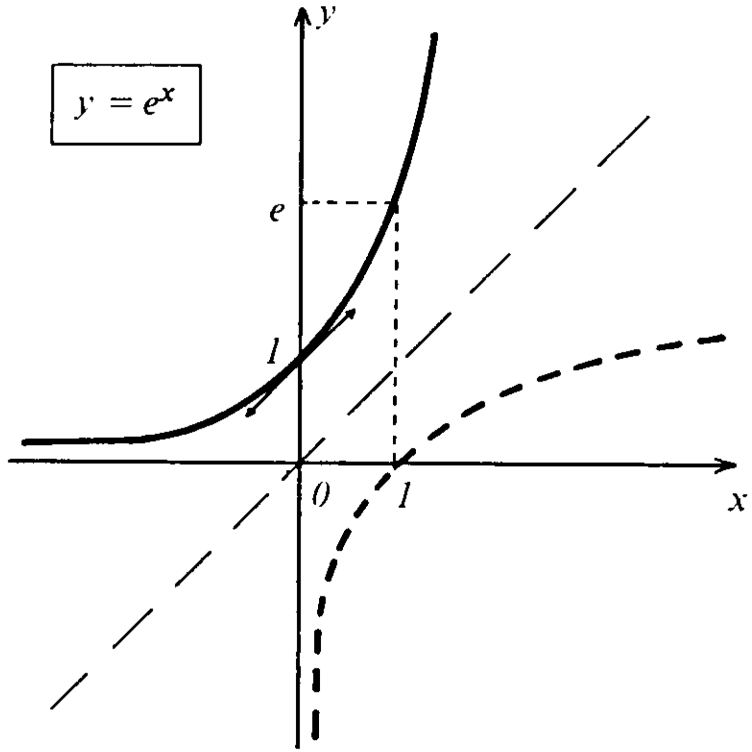


Fonction réciproque de la fonction TANGENTE qui est continue strictement croissante sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

$$y = \text{Arc}\tan x \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \tan y$$

$$\forall\, x \in\ ]-\infty, +\infty[\qquad\qquad \forall\, y \in\ ]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$$

VI. Fonction exponentielle



Fonction réciproque de la fonction LOGARITHME NEPERIEN qui est continue strictement croissante sur l'intervalle] 0, +∞ [

$y = \exp x = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y$

$\forall x \in \,]-\infty, +\infty[\qquad \forall y \in \,]0, +\infty[$

VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

1. Définitions

Soit un nombre **a strictement positif** et **différent de 1**.

$\mathbf{y = a^x}$ $\forall\ x \in]-\infty, +\infty[$ fonction exponentielle de base a

$$\Leftrightarrow$$

$\mathbf{x = \log_a y}$ $\forall\ y \in]0, +\infty[$ fonction logarithme de base a

VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

1. Fonctions logarithmiques (a>0 et a ≠1)

⁎ Définition

$$y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

fonction définie, continue, dérivable $\forall\ x \in \left]0, +\infty\right[$

⁎ Dérivée

$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

y' a le signe de ln a (positif si a>1 , négatif si 0<a<1)

VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

1. Fonctions logarithmiques (a>0 et a ≠1)

* **Tableau de variation et graphe**

	a>1		**0<a<1**
x	0 1 a $+\infty$	x	0 a 1 $+\infty$
ln x	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$	ln x	$-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$
$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$	$-\infty \nearrow 0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$	$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$	$+\infty \searrow 1 \searrow 0 \searrow -\infty$

VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

1. Fonctions logarithmiques (a>0 et a ≠1)

∗ Tableau de variation et graphe

a>1

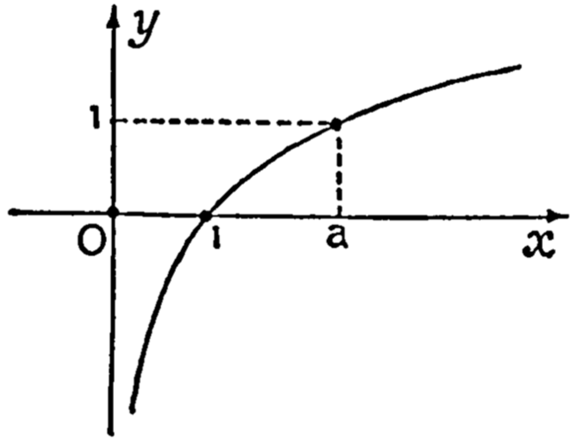
x	0		1		a		$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	↗	0	↗		↗	$+\infty$
$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

0<a<1

x	0		a		1		$+\infty$
$\ln x$	$-\infty$	↗		↗	0	↗	$+\infty$
$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$	$+\infty$	↘	1	↘	0	↘	$-\infty$

VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

1. Fonctions logarithmiques ($a>0$ et $a \neq 1$)

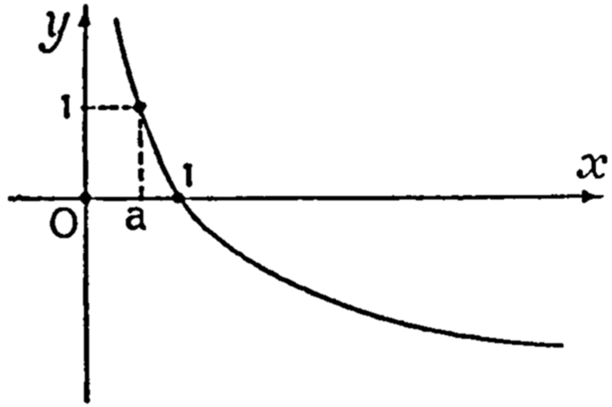


<u>Asymptote</u>: Axe Oy

(quand $x \to 0$, $\log_a x \to \pm\infty$)

<u>Direction asymptotique</u>: Axe Ox

(quand $x \to +\infty$, $\log_a x \to \pm\infty$
et $\dfrac{\log_a x}{x} \to 0$)



VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

1. Fonctions logarithmiques (a>0 et a ≠1)

∗ **Relations**

pour u, v rééels strcitements positifs et r rationnel

$$\log_a(u.v) = \log_a u + \log_a v$$

$$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$$

$$\log_a u^r = r \log_a u$$

VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

1. Fonctions logarithmiques (a>0 et a ≠1)

⁎ **Relations**

Changement de base (b>0, b ≠ 1) : x > 0

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\ln x}{\ln a} \cdot \frac{\ln a}{\ln b} = \log_a x . \log_b a = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} = \frac{1}{\frac{\ln b}{\ln a}} = \frac{1}{\log_a b}$$

donc

$$. \log_a b . \log_b a = 1$$

VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

1. Fonctions exponentielles ($a>0$ et $a \neq 1$)

* **Définition**

$$y = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$$

fonction définie, continue, dérivable $\forall\ x \in]-\infty, +\infty[$

* **Dérivée**

$$y' = \ln a . e^{x \ln a} = a^x . \ln a$$

y' a le signe de ln a (positif si a>1 , négatif si 0<a<1)

VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

2. Fonctions exponentielles ($a>0$ et $a \neq 1$)

⁎ **Tableau de variation et graphe**

Le sens de variation de $y = a^x$ se déduit de celui de la fonction réciproque $x = \log_a y$.

Dans un repère orthonormé, son graphe est symétrique de celui de $Y = \log_a X$ par rapport à la première bissectrice des axes.

VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

2. Fonctions exponentielles ($a>0$ et $a \neq 1$)

∗ Tableau de variation et graphe

a>1

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y = a^x$	0 $\nearrow$	1	a	$\nearrow$ $+\infty$
Limites	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$		$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$	
	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x / x = +\infty$			

0<a<1

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y = a^x$	$+\infty$ $\searrow$	1	a	$\searrow$ 0
Limites	$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$		$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$	
	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x / x = -\infty$			

VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

2. Fonctions exponentielles (a>0 et a ≠1)

∗ **Tableau de variation et graphe**

a>1

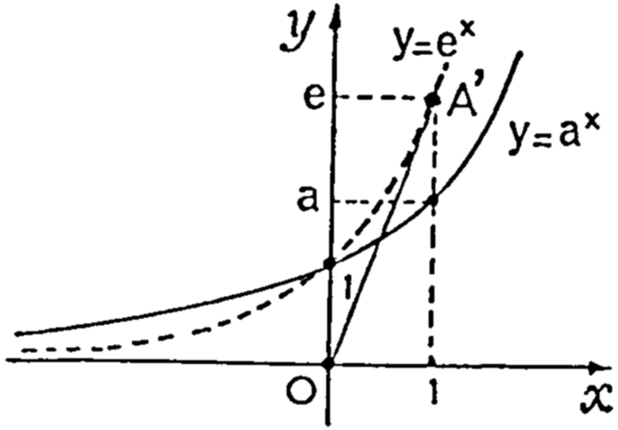
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y = a^x$	0	1	a	$+\infty$
Limites	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$		$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$	
	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x / x = +\infty$			

0<a<1

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$y = a^x$	$+\infty$	1	a	0
Limites	$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$		$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$	
	$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x / x = -\infty$			

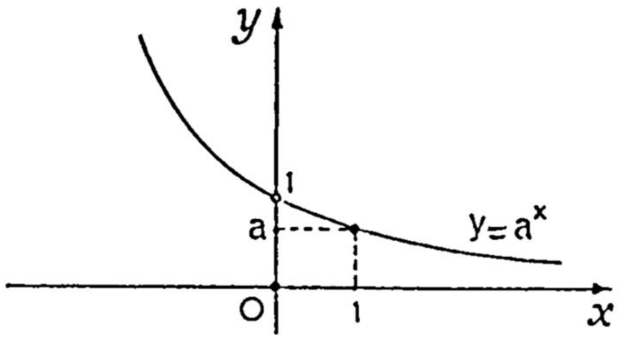
VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

2. Fonctions exponentielles ($a>0$ et $a \neq 1$)



Asymptote: Axe Ox

Direction asymptotique: Axe Oy



VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

2. Fonctions exponentielles (a>0 et a ≠1)

⁎ **Propriétés**

Soient a>0 , a≠1 et b>0, b≠1 , quels que soient x et x' réels,

on peut écrire :

$$a^x . a^{x'} = a^{(x+x')}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$[a^x]^{x'} = a^{xx'}$$

$$a^x . \ b^x = [ab]^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left[\frac{a}{b}\right]^x$$

VII. Fonctions logarithmes et exponentielles de base quelconque a

2. Fonctions exponentielles ($a>0$ et $a \neq 1$)

∗ Expression d'un nombre sous forme d'exponentielle ou de logarithme

* $\forall \ m > 0 \qquad m = a^{\log_a(m)} = e^{\ln(m)}$

Conséquence : $y = \mathbf{a^x} = [e^{\ln(a)}]^x = \mathbf{e^{x \ln a}}$

* $\forall \ m \in \Re \ \ m = \log_a [a^m] = \ln [e^m]$

VIII. Applications

$$\log_5 8 = ?$$

$$\log_\pi(3) = ?$$

$$e^{-\ln(2)} = ?$$

$$2^{\log_{(1/2)^3}\left(\frac{27}{125}\right)} = ?$$

VIII. Applications - Correction

$$\log_5 8 = \frac{\ln(8)}{\ln(5)}$$

$$\log_\pi(3) = \frac{\ln(3)}{\ln(\pi)}$$

$$e^{-\ln(2)} = e^{\ln(2^{-1})} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$2^{\log_{(1/2)^3}\left(\frac{27}{125}\right)} = e^{\frac{\ln\left(\frac{27}{125}\right)}{\ln(1/2)^3}\times\ln(2)} = e^{\frac{\ln\left(\frac{27}{125}\right)}{-3\ln(2)}\times\ln(2)}$$

$$= e^{\frac{\ln(3^3)-\ln(5^3)}{-3}}$$

$$= e^{-\ln 3} \times e^{\ln(5)}$$

$$= 5/3$$

Rappel :

$2^x = e^{x\ln 2}$

$$\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$$

VIII. Applications

<u>Résoudre les équations et inéquations :</u>

1) $e^{2x} + 3e^{x} - 4 = 0$

2) $4e^{2x} < 3e^{x} + 1$

3) $\ln(2-5x) = 0$

4) $2\ln(x-4)=\ln(x)-2\ln(2)$

5) $\ln\left(\dfrac{2x-3}{5x+1}\right) < 0$

VIII. Applications - Correction

1) $e^{2x} + 3e^{x} - 4 = 0$

On pose $X = e^{x}$ et on obtient :

$$X^{2} + 3X - 4 = 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow X = 1 \text{ ou } X = -4$$

$$X = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } X = -4 \text{ impossible car } e^{x} > 0$$

Conclusion : la solution est x=0

VIII. Applications - Correction

2) $4e^{2x} < 3e^{x} + 1$

On pose $X = e^{x}$ et on obtient :

$$4X^2 < 3X + 1 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 4X^2 - 3X - 1 < 0$$

$\Delta = 9 + 16 = 25$

Les racines de ce polynôme sont : X=1 et X=-1/4
D'après la règle connue (signe de a (a=4) à l'extérieur des racines on obtient :

$$-\frac{1}{4} < X < 1$$

l'inégalité de gauche est toujours vraie car $X = e^{x}$>0

de plus X<1 $\Leftrightarrow e^{x} < e^{0} \Leftrightarrow x < 0$

Conclusion : les solutions sont telles que x<0

VIII. Applications - Correction

3) ln(2-5x) = 0

$$\ln(2-5x)=0 \Leftrightarrow 2-5x=1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$$

VIII. Applications - Correction

4) 2ln(x-4)=ln(x)-2ln(2)

Domaine de résolution :

$$\begin{cases} x - 4 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 4$$

Résolution :

$$\ln(x-4)^2 = \ln\left(\frac{x}{2^2}\right) \Leftrightarrow (x-4)^2 = \frac{x}{4} \Leftrightarrow x^2 - \frac{33}{4}x + 16 = 0$$

$\Delta = \left(\frac{33}{4}\right)^2 - 4 \times 16 = \frac{65}{16}$ les solutions de cette équation sont :

VIII. Applications - Correction

4) 2ln(x-4)=ln(x)-2ln(2)

$$x_1 = \frac{\frac{33}{4} + \sqrt{\frac{65}{16}}}{2} = \frac{33}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{65} = 5.13$$

$$x_2 = \frac{\frac{33}{4} - \sqrt{\frac{65}{16}}}{2} = 3.11$$

Finalement seul x_1 est solution de l'équation car $x_2 < 4$

VIII. Applications - Correction

5) $\ln\left(\dfrac{2x-3}{5x+1}\right) < 0$

Domaine de résolution :

$$\frac{2x-3}{5x+1} > 0 \Leftrightarrow x < -1/5 \text{ ou } x > 3/2$$

Signe		-1/5		3/2	
2x-3	-		-		+
5x+1	-		+		+
$\frac{2x-3}{5x+1}$	+		-		+

VIII. Applications - Correction

5) $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) < 0$

Résolution :

$$\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1} < 1 \qquad \Leftrightarrow \frac{2x-3}{5x+1} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-3x-4}{5x+1} < 0$$

Signe		-4/3		-1/5	
-3x-4	+		-		-
5x+1	-		-		+
$\frac{-3x-4}{5x+1}$	-		+		-

VIII. Applications - Correction

5) $\ln\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) < 0$

Conclusion :

$D_f = \left]-\infty, -1/5\right[\cup \left]3/2, +\infty\right[$ on peut donc en conclure que :

$$S = \left]-\infty, -4/3\right[\cup \left]3/2, +\infty\right[$$

Med@TICE
Université Joseph Fourier Grenoble 1
ETUDES DE SANTÉ
Première Année Commune

www.medatice-grenoble.fr

Mentions légales

Ce document a été réalisé par la Cellule TICE de la Faculté de Médecine et de Pharmacie de Grenoble
(Université Joseph Fourier – Grenoble 1)