www.medatice-grenoble.fr

UE4 : Evaluation des méthodes d’analyses appliquées aux sciences de la vie et de la santé – Analyse

Chapitre 1 :

Généralités sur les fonctions numériques d’une variable réelle

Christelle MELODELIMA

Année universitaire 2011/2012

Plan du Cours

1. Fonction numériques d'une variable réelle

   a) Définitions, notions de limites et continuité ← Cours 1
   b) Fonctions inverses ou réciproques
   c) Fonctions exponentielles et logarithmiques
   d) Dérivées et différentielles
   e) Applications aux sciences expérimentales

2. Fonctions de plusieurs variables

   a) Dérivées partielles et différentielles
   b) Calcul incertitude

3. Exercices corrigés

Plan du Cours

1. Fonction numériques d’une variable réelle

   a) Définitions, notions de limites et continuité
   b) Fonctions inverses ou réciproques
   c) Fonctions exponentielles et logarithmiques
   d) Dérivées et différentielles
   e) Applications aux sciences expérimentales

Cours 2

2. Fonctions de plusieurs variables

   a) Dérivées partielles et différentielles
   b) Calcul incertitude

3. Exercices corrigés

Plan du Cours

1. Fonction numériques d'une variable réelle

   a) Définitions, notions de limites et continuité
   b) Fonctions inverses ou réciproques
   c) Fonctions exponentielles et logarithmiques
   d) Dérivées et différentielles
   e) Applications aux sciences expérimentales

Cours 3

2. Fonctions de plusieurs variables

   a) Dérivées partielles et différentielles
   b) Calcul incertitude

3. Exercices corrigés

Plan du Cours

1. Fonction numériques d’une variable réelle

   a) Définitions, notions de limites et continuité
   b) Fonctions inverses ou réciproques
   c) Fonctions exponentielles et logarithmiques
   d) Dérivées et différentielles
   e) Applications aux sciences expérimentales

   Cours 4

2. Fonctions de plusieurs variables

   a) Dérivées partielles et différentielles
   b) Calcul incertitude

3. Exercices corrigés

Plan du Cours

1. Fonction numériques d'une variable réelle

   a) Définitions, notions de limites et continuité
   b) Fonctions inverses ou réciproques
   c) Fonctions exponentielles et logarithmiques
   d) Dérivées et différentielles
   e) Applications aux sciences expérimentales

Cours 5

2. Fonctions de plusieurs variables

   a) Dérivées partielles et différentielles
   b) Calcul incertitude

3. Exercices corrigés

Plan du Cours

1. Fonction numériques d’une variable réelle

   a) Définitions, notions de limites et continuité
   b) Fonctions inverses ou réciproques
   c) Fonctions exponentielles et logarithmiques
   d) Dérivées et différentielles
   e) Applications aux sciences expérimentales

2. Fonctions de plusieurs variables

   a) Dérivées partielles et différentielles
   b) Calcul incertitude

   Cours 6

3. Exercices corrigés

Plan du Cours

1. Fonction numériques d’une variable réelle

   a) Définitions, notions de limites et continuité
   b) Fonctions inverses ou réciproques
   c) Fonctions exponentielles et logarithmiques
   d) Dérivées et différentielles
   e) Applications aux sciences expérimentales

2. Fonctions de plusieurs variables

   a) Dérivées partielles et différentielles
   b) Calcul incertitude

3. Exercices corrigés

I. Définitions

- Fonction d'une variable réelle

$\Re$ ensemble des réels.

f fonction numérique d'une variable réelle est une application d'une partie **D** de $\Re$ dans $\Re$

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

I. Définitions

- Fonction d’une variable réelle

$\Re$ ensemble des réels.

f fonction numérique d’une variable réelle est une application d’une partie **D** de $\Re$ dans $\Re$

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

Exemple:

$$f : \Re - \{0\} \longrightarrow \Re$$

$$x \longrightarrow 1/x$$

I. Définitions

- Fonction d'une variable réelle

$\Re$ ensemble des réels.

f fonction numérique d'une variable réelle est une application d'une partie **D** de $\Re$ dans $\Re$

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

Exemple:

$$f : \Re - \{0\} \longrightarrow \Re$$
$$x \longrightarrow 1/x$$

D ensemble de définition de f: $\forall\, x \in D$, $y = f(x)$

I. Définitions

- Opération sur les fonctions

  - Somme, multiplication par un scalaire, produit

I. Définitions

- Opération sur les fonctions

  - Somme, multiplication par un scalaire, produit

Exemple:

$\mathbf{f}: \; x \rightarrow 4x+3$ $\qquad$ $\mathbf{g}: \; y \rightarrow \sin y$

$f(x)+g(x) = 4x+3+\sin(x)$

I. Définitions

- Opération sur les fonctions

  - Somme, multiplication par un scalaire, produit

Exemple:

$\mathbf{f} : x \rightarrow 4x+3$ $\mathbf{g} : y \rightarrow \sin y$

$f(x)+g(x) = 4x+3+\sin(x)$

$10\,f(x) = 40x+30$

I. Définitions

➢ Opération sur les fonctions

- Somme, multiplication par un scalaire, produit

Exemple:

$\mathbf{f} : x \rightarrow 4x+3$ $\mathbf{g} : y \rightarrow \sin y$

$f(x)+g(x) = 4x+3+\sin(x)$

$10\, f(x) = 40x+30$

$f(x).g(x) = (4x+3) \sin(x)$

I. Définitions

➢ Opération sur les fonctions

- Somme, multiplication par un scalaire, produit
- **Composition des fonctions**

Soient f une fonction définie sur D,
g une fonction définie sur $f(D)$.

I. Définitions

➢ Opération sur les fonctions

- Somme, multiplication par un scalaire, produit

- **Composition des fonctions**

Soient f une fonction définie sur D,
g une fonction définie sur f(D).

La fonction composée notée gof est la fonction $x \rightarrow g[f(x)]$

I. Définitions

➢ Opération sur les fonctions

- Somme, multiplication par un scalaire, produit
- **Composition des fonctions**

Soient f une fonction définie sur D,
g une fonction définie sur f(D).

La fonction composée notée gof est la fonction $x \to g[f(x)]$

$$x_0 \xrightarrow{f} y_0 = f(x_0)$$

I. Définitions

➢ Opération sur les fonctions

- Somme, multiplication par un scalaire, produit
- **Composition des fonctions**

Soient f une fonction définie sur D,
g une fonction définie sur f(D).

La fonction composée notée gof est la fonction x → g[f(x)]

$$x_0 \xrightarrow{f} y_0 = f(x_0) \xrightarrow{g} z_0 = g\left[f(x_0)\right] = (gof)(x_0)$$

gof

I. Définitions

➢ Opération sur les fonctions

- Somme, multiplication par un scalaire, produit
- **Composition des fonctions**

Soient f une fonction définie sur D,
g une fonction définie sur f(D).

La fonction composée notée gof est la fonction $x \rightarrow g[f(x)]$

$$\begin{tikzcd} x_0 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & y_0 = f(x_0) \arrow[r, "g"] & z_0 = g[f(x_0)] = (gof)(x_0) \end{tikzcd}$$

Exemple:

f : $x \rightarrow 4x+3$ **g** : $y \rightarrow \sin y$ **gof** $(x)=g(f(x))$

I. Définitions

➢ Opération sur les fonctions

- Somme, multiplication par un scalaire, produit
- **Composition des fonctions**

Soient f une fonction définie sur D,
g une fonction définie sur f(D).

La fonction composée notée gof est la fonction x → g[f(x)]

$$x_0 \xrightarrow{f} y_0 = f(x_0) \xrightarrow{g} z_0 = g\left[f(x_0)\right] = (gof)(x_0)$$

gof

Exemple:

f : x → 4x+3 **g** : y → siny **gof** (x)=g(f(x))=g(4x+3)

I. Définitions

- Opération sur les fonctions

  - Somme, multiplication par un scalaire, produit
  - **Composition des fonctions**

Soient f une fonction définie sur D,
g une fonction définie sur f(D).

La fonction composée notée gof est la fonction x → g[f(x)]

$$x_0 \xrightarrow{f} y_0 = f(x_0) \xrightarrow{g} z_0 = g\left[f(x_0)\right] = (gof)(x_0)$$

gof

Exemple:

f : x → 4x+3 **g** : y → siny **gof** (x)=g(f(x))=g(4x+3)=sin(4x+3)

I. Définitions

- Exemple

Soient f, g et h définies par :

$$f(x) = \sqrt{x},\ g(x) = \ln(1 - x) \text{ et } h(x) = 1/x$$

Donner la formule algébrique et le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f \circ g$, $f \circ h$ et $g \circ h$.

I. Définitions

- Exemple

Soient f, g et h définies par :

$$f(x) = \sqrt{x},\ \mathrm{g(x) = ln(1 - x)\ et\ h(x)} = 1/x$$

Donner la formule algébrique et le domaine de définition des fonctions suivantes :

$f \circ g$, $f \circ h$ et $g \circ h$.

$$D_f = R^+,\ D_g = \left]-\infty, 1\right[\text{ et } D_h = R^*$$

I. Définitions

$$D_f = R^+,\ D_g = \left]-\infty, 1\right[\text{ et } D_h = R^*$$

➢ **$f_o g$:**

$$\left.\begin{aligned} & x \in D_{f_o g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \ln(1-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1-x \geq 1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in R^- \end{aligned}\right\} \text{Domaine de définition}$$

I. Définitions

$$D_f = R^+,\ D_g = \left]-\infty,1\right[\text{ et } D_h = R^*$$

➢ **$f_o g$:**

$$x \in D_{f_o g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \ln(1-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1-x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in R^-$$

$$\left.\text{Soit } x \in D_{f_o g} \quad f_o g = f(g(x)) = f(\ln(1-x)) = \sqrt{\ln(1-x)}\ \right\} \text{Composition}$$

I. Définitions

$$D_f = R^+,\ D_g = \left]-\infty, 1\right[\text{ et } D_h = R^*$$

➢ $f_o g$:

$$x \in D_{f_o g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \ln(1-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 - x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in R^-$$

$$\text{Soit } x \in D_{f_o g} \quad f_o g = f(g(x)) = f(\ln(1-x)) = \sqrt{\ln(1-x)}$$

➢ $f_o h$:

$$x \in D_{f_o h} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1/x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in R^{*+}$$

Domaine de définition

I. Définitions

$$D_f = R^+,\ D_g = \left]-\infty, 1\right[\text{ et } D_h = R^*$$

➢ **$f_o g$:**

$$x \in D_{f_o g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ \ln(1-x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1-x \geq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in R^-$$

$$Soit\ x \in D_{f_o g} \quad f_o g = f(g(x)) = f(\ln(1-x)) = \sqrt{\ln(1-x)}$$

➢ **$f_o h$:**

$$x \in D_{f_o h} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1/x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow x \in R^{*+}$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ Soit\ x \in D_{f_o h} \quad f_o h = f(h(x)) = f(1/x) = \sqrt{1/x} \\ \end{array}\right\} \text{Composition}$$

I. Définitions

➢ $g_o h$:

$$x \in D_{g_o h} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1/x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > 1 \quad \Bigg\} \quad \text{Domaine de définition}$$

I. Définitions

➢ ***$g_o h$:***

$$x \in D_{g_o h} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_h \\ h(x) \in D_g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ 1/x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \text{ ou } x > 1$$

$$\left. Soit\ x \in D_{g_o h} \quad g_o h = g(h(x)) = g(1/x) = \ln(1 - 1/x) \right\}$$ Composition

I. Définitions

- Courbe représentative (*C*)

  ensemble des points M(x,y) du plan

  repère orthogonal (normé ou non) (Oxy)

I. Définitions

- Courbe représentative (*C*)

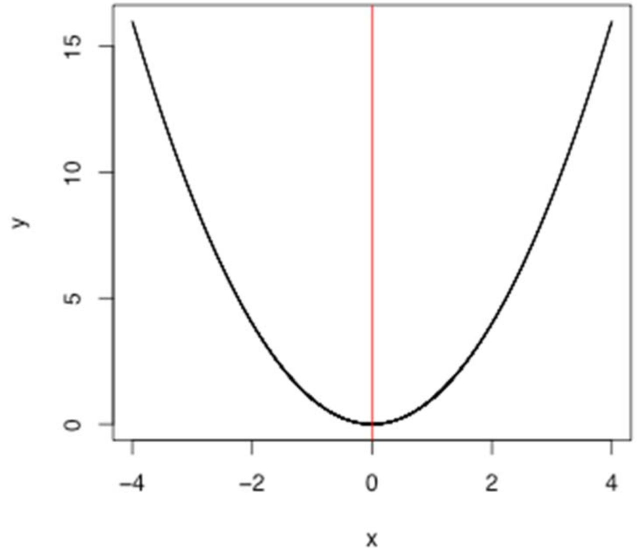
  ensemble des points M(x,y) du plan

  <u>repère orthogonal</u> (normé ou non) (Oxy)

- Propriétés particulières

- Fonction paire $\begin{cases} x \in D \Leftrightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

Oy est axe de symétrie de *(C)*



Exemple : $f : x \rightarrow x^2$

I. Définitions

➢ Courbe représentative (*C*)

ensemble des points M(x,y) du plan

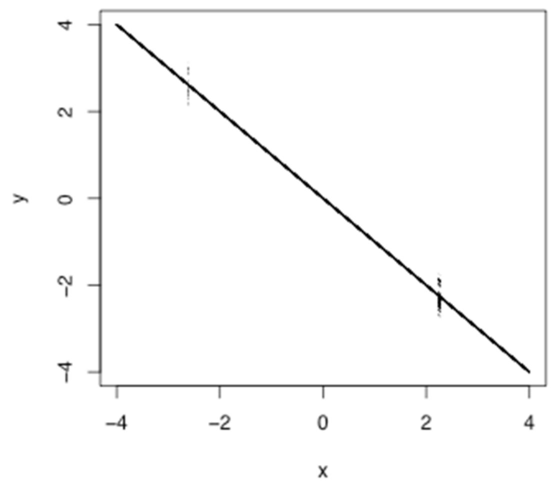
<u>repère orthogonal</u> (normé ou non) (Oxy)

➢ Propriétés particulières

- Fonction impaire $\begin{cases} x \in D \Leftrightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

O est centre de symétrie de *(C)*

Exemple : $f : x \to -x$



I. Définitions

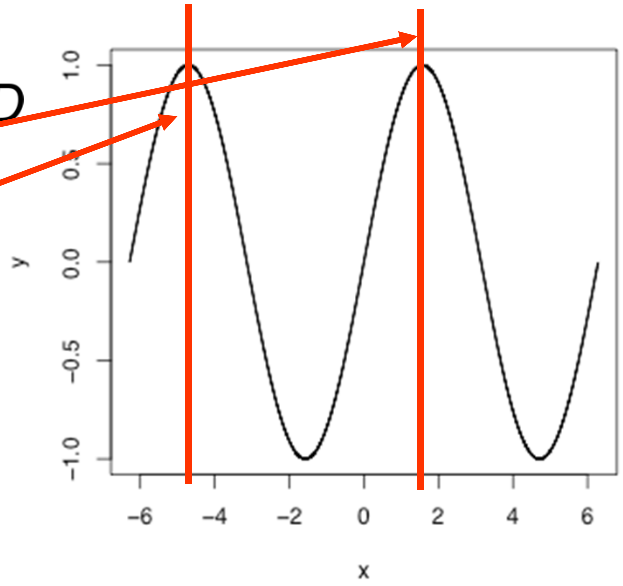
- Courbe représentative (C)

  ensemble des points M(x,y) du plan

  <u>repère orthogonal</u> (normé ou non) (Oxy)

- Propriétés particulières

- Fonction périodique $\begin{cases} x \in D \Leftrightarrow T + x \in D \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$



Exemple : $f : x \rightarrow \sin(x)$

II. Notion de limite

1. Définitions

- Limite en un point x_0 :

Soit f définie sur D , avec $x_0 \in D$

f(x) tend vers une limite finie ℓ quand x tend vers x_o

$\Leftrightarrow$ pour x voisin de x_0, f(x) est aussi voisin de ℓ qu'on veut.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

II. Notion de limite

1. Définitions

- **Limite en un point x_0 :**

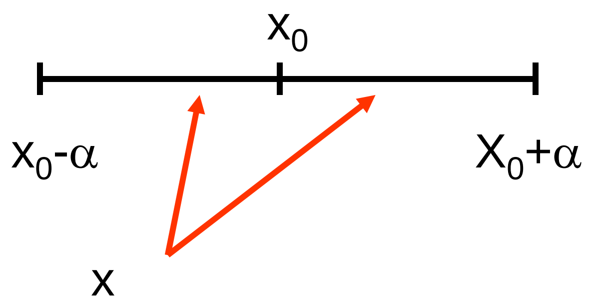
Soit f définie sur D , avec $x_0 \in D$

f(x) tend vers une limite finie ℓ quand x tend vers x_o

$\Leftrightarrow$ pour x voisin de x_0, f(x) est aussi voisin de ℓ qu'on veut.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

x voisin de x_0 signifie $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ ou $|x - x_0| < \alpha$ $(\alpha > 0)$



II. Notion de limite

1. Définitions

- Limite en un point x_0 :

Soit f définie sur D , avec $x_0 \in D$

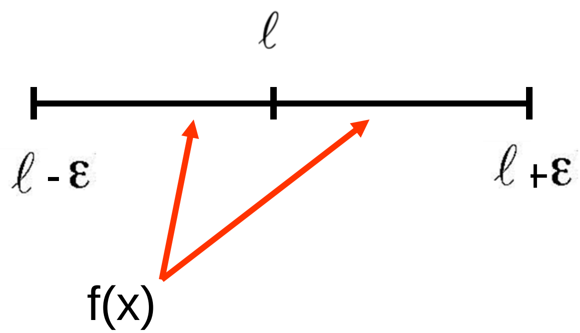
f(x) tend vers une limite finie ℓ quand x tend vers x_o

$\Leftrightarrow$ pour x voisin de x_0, f(x) est aussi voisin de ℓ qu'on veut.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

x voisin de x_0 signifie $x \in \left]x_0-\alpha, x_0+\alpha\right[$ ou $|x - x_0| < \alpha$ $(\alpha > 0)$

f(x) voisin de ℓ s'écrit $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$



II. Notion de limite

1. Définitions

- Limite en un point x_0 :

Soit f définie sur D , avec $x_0 \in D$

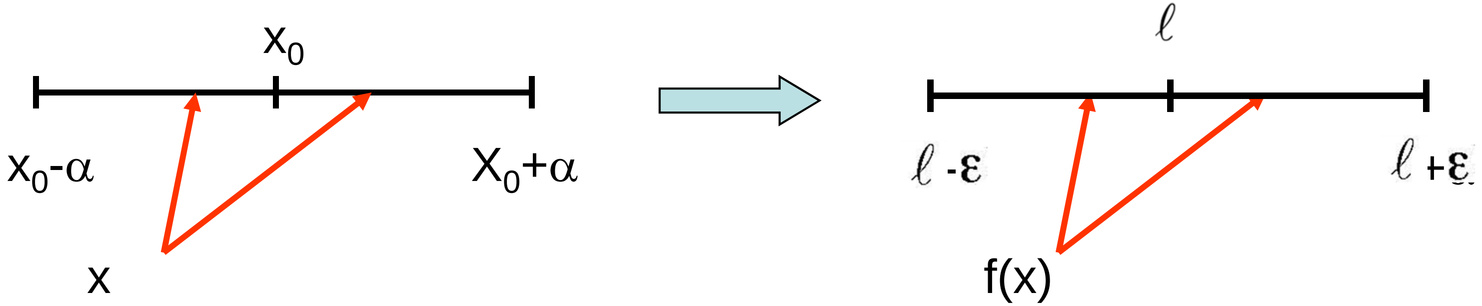
f(x) tend vers une limite finie ℓ quand x tend vers x_o

$\Leftrightarrow$ pour x voisin de x_0, f(x) est aussi voisin de ℓ qu'on veut.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

x voisin de x_0 signifie $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ ou $|x- x_0|<\alpha$ $(\alpha>0)$

f(x) voisin de ℓ s'écrit $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$



II. Notion de limite

1. Définitions

- **Limite en un point x_0 :**

Soit f définie sur D , avec $x_0 \in D$

f(x) tend vers une limite finie ℓ quand x tend vers x_o

$\Leftrightarrow$ pour x voisin de x_0, f(x) est aussi voisin de ℓ qu'on veut.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell}$$

x voisin de x_0 signifie $x \in]x_0-\alpha, x_0+\alpha[$ ou $|x- x_0|<\alpha$ $(\alpha>0)$

f(x) voisin de ℓ s'écrit $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$

<u>Notation:</u>

$\forall\alpha>0$, $\exists$ $\varepsilon>0$ tel que $|x-x_0|<\alpha \Rightarrow |f(x)-\ell|<\varepsilon$

II. Notion de limite

Remarque:

Extension de la notion de limite aux cas où x et/ou ℓ deviennent infinis

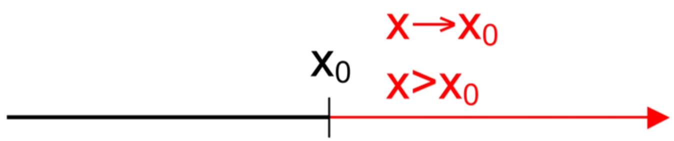
Ex: $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$

$\Leftrightarrow \forall K>0, \exists \alpha>0$ tel que $|x-x_0|<\alpha \Rightarrow f(x)>K$ ou $f(x)<-K$

II. Notion de limite

- Limite à droite en x_0 :

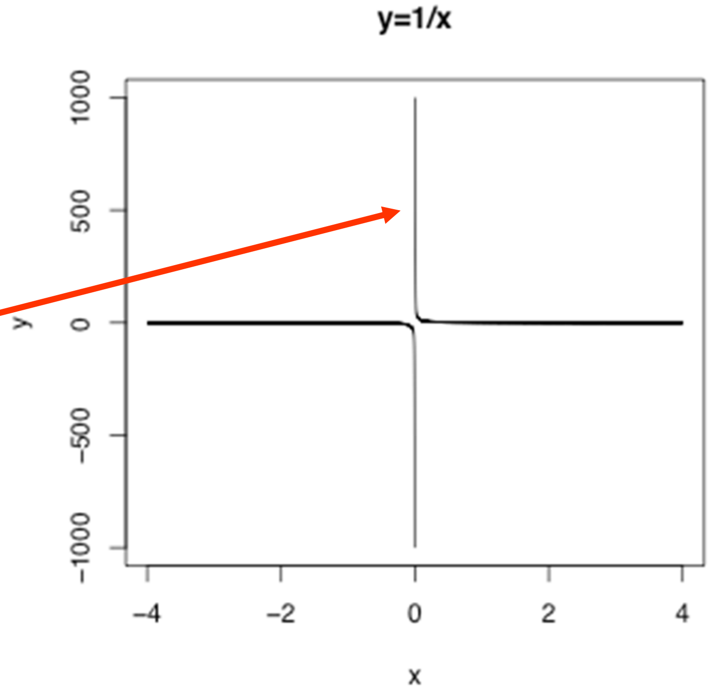
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_d$$



f(x) tend vers la limite ℓ_d quand x tend vers x_o par valeurs supérieures à x_o

Exemple :

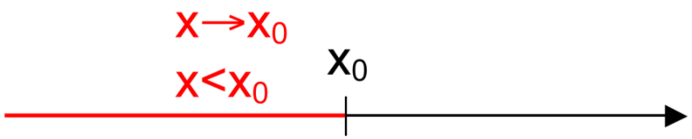
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$



II. Notion de limite

- Limite à gauche en x_0 :

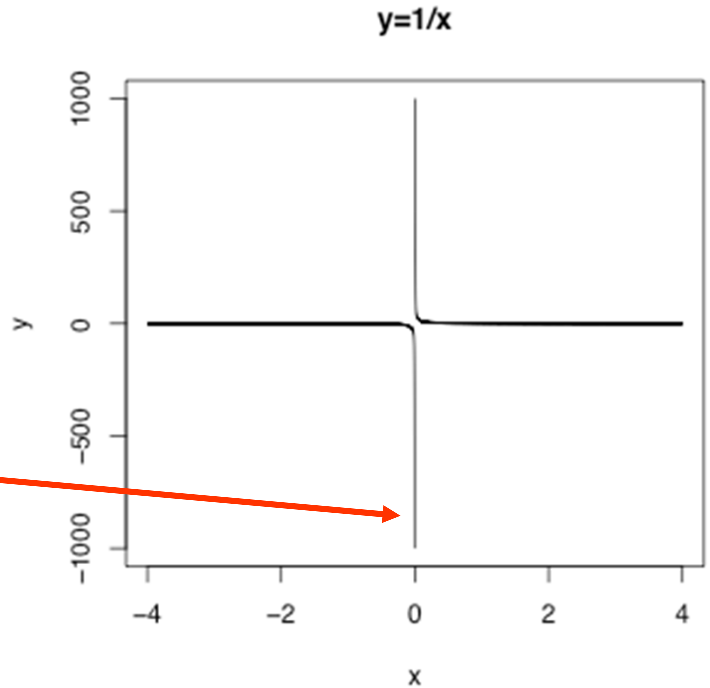
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_g$$



f(x) tend vers la limite ℓ_g quand x tend vers x_o par valeurs inférieures à x_o

Exemple :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



II. Notion de limite

2. Opérations sur les limites

Soient f(x) et g(x) définies sur D telles que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$$

- Somme:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = \ell_1 + \ell_2$$

forme indéterminée $+\infty - \infty$

II. Notion de limite

2. Opérations sur les limites

Soient f(x) et g(x) définies sur D telles que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1 \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$$

- Somme:

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x) + g(x) \right] = \ell_1 + \ell_2$$

forme indéterminée $+\infty - \infty$

- Multiplication par un scalaire $\lambda \in \Re$

$$\lim_{x \to x_0} \left[\lambda f(x) \right] = \lambda \ell_1$$

II. Notion de limite

2. Opérations sur les limites

- Produit :

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = \ell_1.\ell_2$$

forme indéterminée $\pm\infty.0$

II. Notion de limite

2. Opérations sur les limites

- Produit :

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = \ell_1.\ell_2$$

forme indéterminée $\pm\infty.0$

- Quotient :

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

II. Notion de limite

2. Opérations sur les limites

- Produit :

$$\lim_{x \to x_0} \left[f(x).g(x) \right] = \ell_1.\ell_2$$

forme indéterminée $\pm\infty.0$

- Quotient :

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\ell_1}{\ell_2}$$

formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$ et $\frac{0}{0}$

- Inégalités:

si $f(x) > g(x)$ $\Rightarrow$ $\ell_1 \geq \ell_2$

si $f(x) < g(x)$ $\Rightarrow$ $\ell_1 \leq \ell_2$

II. Notion de limite

3. Applications : Calculer les limites des fonctions suivantes :

1) $\lim_{x \to +\infty} \sin(x)$

2) $\lim_{x \to 0} \sqrt{(x+1)}$

3) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$

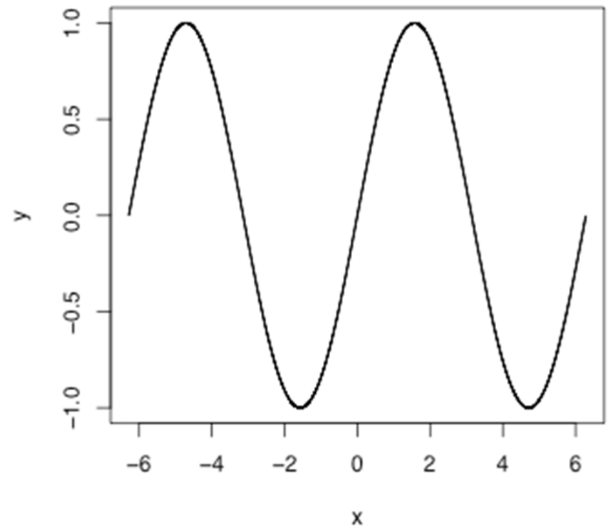
4) $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{3x-4}{x+2}}$

5) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x$

II. Notion de limite

3. Applications : Correction

1) $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = \varnothing$



II. Notion de limite

3. Applications : Correction

1) $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = \varnothing$

2) $\lim_{x \to 0} \sqrt{(x+1)} = 1$

II. Notion de limite

3. Applications : Correction

1) $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = \varnothing$

2) $\lim_{x \to 0} \sqrt{(x+1)} = 1$

3) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \\[2ex] \lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty \end{array}\right\} -\infty \,.\, +\infty = -\infty$$

II. Notion de limite

3. Applications : Correction

1) $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = \varnothing$

2) $\lim_{x \to 0} \sqrt{(x+1)} = 1$

3) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$

4) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x-4}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{3 - 4/x}{1 + 2/x} = 3$

0

0

II. Notion de limite

3. Applications : Correction

1) $\lim_{x \to +\infty} \sin(x) = \varnothing$

2) $\lim_{x \to 0} \sqrt{(x+1)} = 1$

3) $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$

4) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{3x-4}{x+2} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{3-4/x}{1+2/x} = 3$

donc $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{\dfrac{3x-4}{x+2}} = \sqrt{3}$

II. Notion de limite

3. Applications : Correction

5) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x$ $\Rightarrow$ $+\infty - \infty$ F.I.

a - b

$\Downarrow$

$$\frac{(a - b)\,(a + b)}{(a + b)}$$

II. Notion de limite

3. Applications : Correction

5) $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 1} - x = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)\left(\sqrt{x^2 - 1} + x\right)}{\sqrt{x^2 - 1} + x}$

a - b

$\Downarrow$

$$\frac{(a - b)\,(a + b)}{(a + b)}$$

II. Notion de limite

3. Applications : Correction

5) $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

II. Notion de limite

3. Applications : Correction

5) $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}+x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\underbrace{\sqrt{x^2-1}+x}_{\to+\infty}} = 0$$

II. Notion de limite

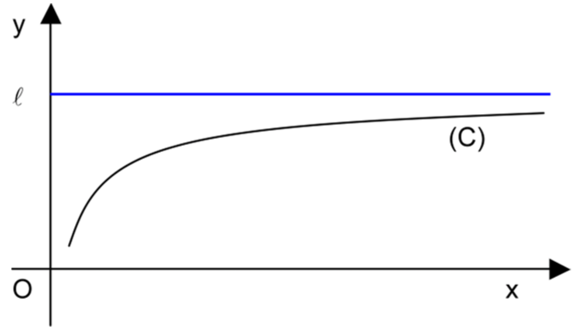
4. Etude des branches infinies

Soit (C) la courbe représentative de f dans le repère Oxy.
(C) présente une **branche infinie** si l'une au moins des coordonnées (x,y) d'un point M parcourant cette branche peut devenir infinie
La branche infinie admet une direction asymptotique ou une asymptote

II. Notion de limite

Asymptotes et direction asymptotiques d'une courbe représentation de y=f(x)

1. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$



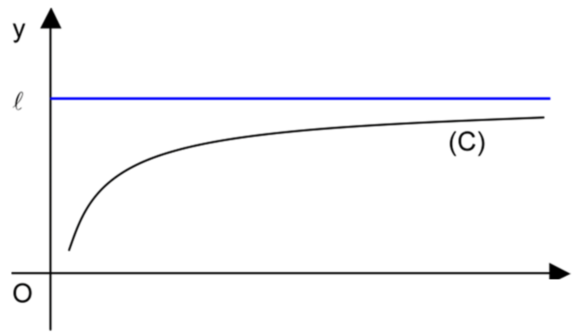
asymptote horizontale
d'équation **y =** ℓ

y = $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - \ell] = 0$

II. Notion de limite

Asymptotes et direction asymptotiques d'une courbe représentation de y=f(x)

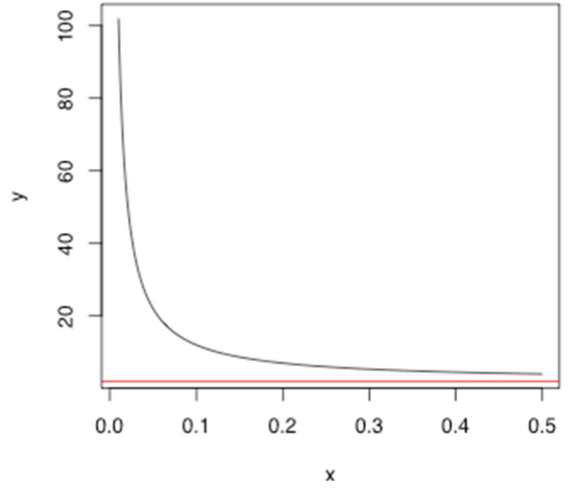
1. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$



asymptote horizontale
d'équation **y =** ℓ

y = $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - \ell] = 0$

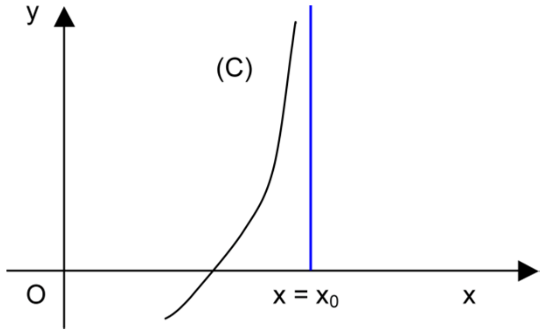
Exemple : $\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$



II. Notion de limite

Asymptotes et direction asymptotiques d'une courbe représentation de y=f(x)

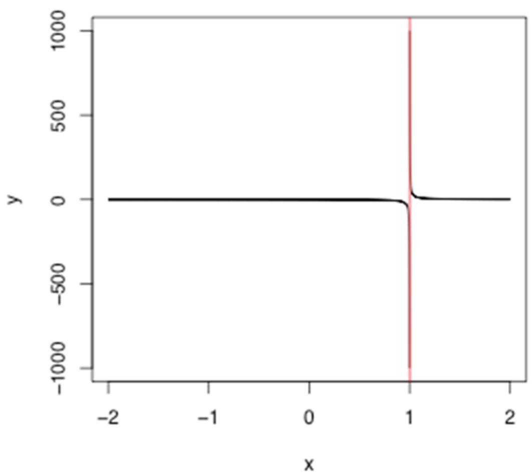
2. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = \pm\infty$



asymptote verticale
d'équation **x = x$_o$**

Exemple : $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$



II. Notion de limite

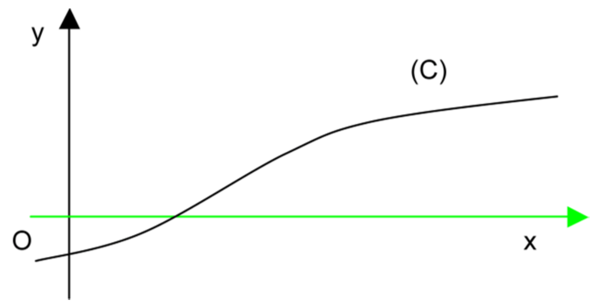
Asymptotes et direction asymptotiques d'une courbe représentation de y=f(x)

3. $\lim\limits_{X \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ **Direction asymptotique**

3a. $\lim\limits_{X \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Ox direction asymptotique

Courbe **(C)** a une **branche parabolique** dans la **direction Ox**



II. Notion de limite

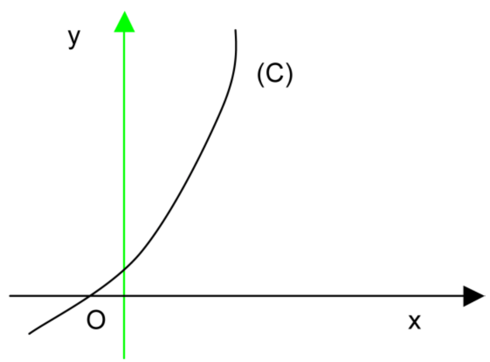
Asymptotes et direction asymptotiques d'une courbe représentation de y=f(x)

3. $\lim_{X \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ **Direction asymptotique**

3b. $\lim_{X \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

Oy direction asymptotique

Courbe **(C)** a une **branche parabolique** dans la **direction Oy**



II. Notion de limite

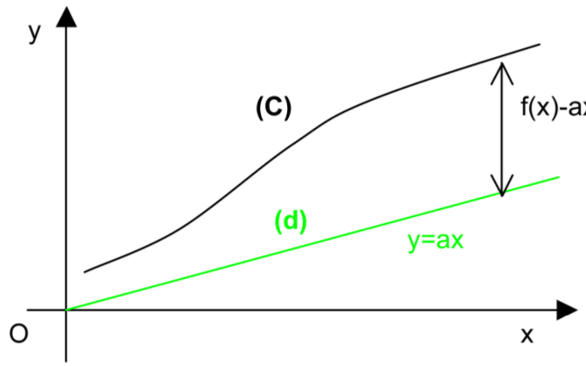
Asymptotes et direction asymptotiques d'une courbe représentation de y=f(x)

3. $\lim_{X \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ **Direction asymptotique**

3c. $\lim_{X \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$
$(a \neq 0)$

et $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = \pm\infty$

y=ax direction asymptotique



Courbe **(C)** a une **branche parabolique** dans la direction **(d)** droite y=ax

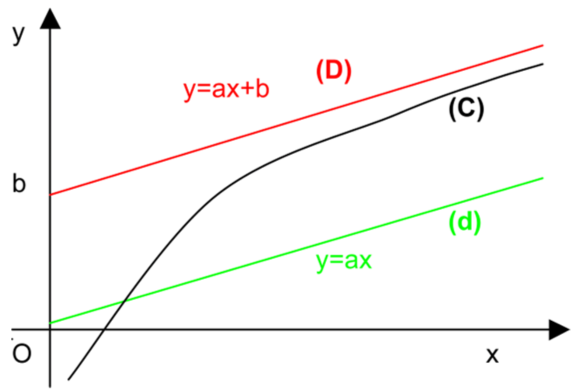
II. Notion de limite

Asymptotes et direction asymptotiques d'une courbe représentation de y=f(x)

3. $\lim\limits_{X \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ **Direction asymptotique**

3d. $\lim\limits_{X \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ (a ≠ 0)

et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - ax] = b$



y=ax <u>direction asymptotique (d)</u>

y=ax+b <u>asymptote oblique (D)</u>

$$\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

III. Notion de continuité

1. Continuité en un point

Soit f(x) définie au voisinage de x_o

La fonction f(x) est continue en x_o si $f(x_o)$ existe et si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

III. Notion de continuité

1. Continuité en un point

Soit f(x) définie au voisinage de x_o
La fonction f(x) est continue en x_o si $f(x_o)$ existe et si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2. Continuité sur un intervalle

a. Définition

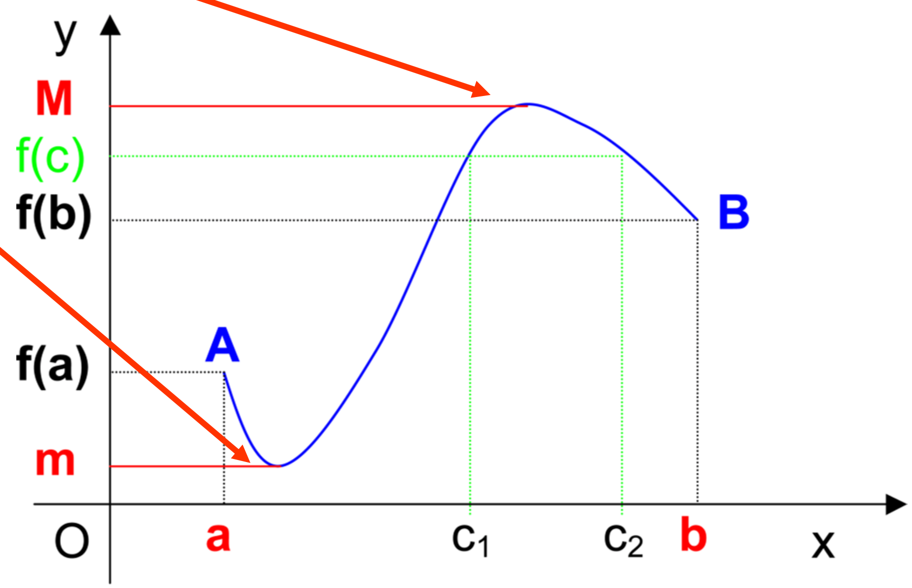
f(x) est continue sur un <u>intervalle fermé</u> [a,b], si
f(x) est continue en tout point de [a,b].

III. Notion de continuité

b.Propriétés

• Toute fonction f(x) continue sur un fermé [a,b] est **bornée** :

$$\forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M$$



III. Notion de continuité

b.Propriétés

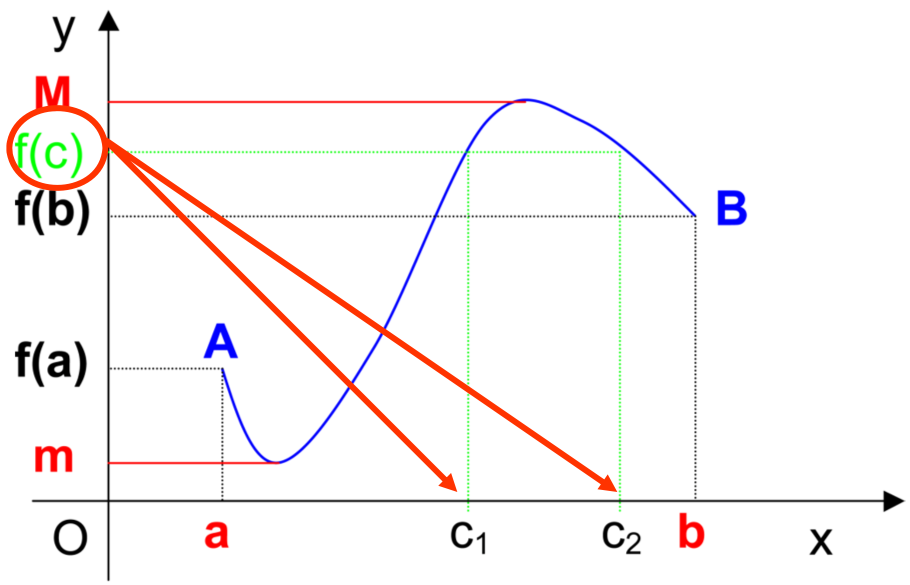
• Toute fonction f(x) <u>continue sur un fermé</u> [a,b] est **bornée** :

$$\forall x \in [a,b] \quad m \leq f(x) \leq M$$

et prend <u>au moins une fois</u> toute valeur de [m,M]

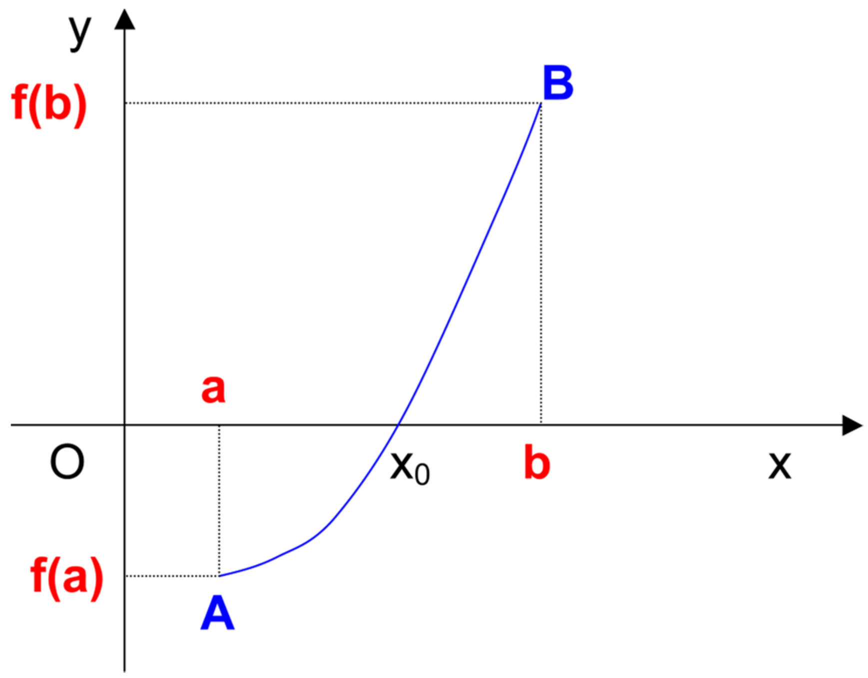
- borne inférieure: $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$

- borne supérieure: $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$



III. Notion de continuité

• Toute fonction f(x) continue et strictement monotone sur [a,b] prend **une fois et une seule**, toute valeur comprise entre f(a) et f(b).



De plus, si f(a).f(b) < 0, alors la fonction s’annule pour une seule valeur $x_0 \in [a,b]$.

www.medatice-grenoble.fr

Mentions légales
