UE4 : Biostatistiques

Chapitre 5 :
Intervalles de confiance

Professeur Philippe CINQUIN

Année universitaire 2010/2011

Plan

- A) Introduction
- B) Statistiques descriptives
- C) Probabilités
- D) Estimation
- E) Intervalles de confiance
- F) Problème récapitulatif
- G) Résumé des objectifs

Intervalle de confiance à 95%

- **Soit N(m,s)**
  - **Trouver δ tel que**
  - **$P(m-\delta \leq N \leq m+\delta) = 0.95$**

- $P(m-\delta \leq N \leq m+\delta) = P(-\delta \leq N-m \leq \delta)$

  $= P(-\delta/s \leq (N-m)/s \leq \delta/s)$

- Or, $Z = (N-m)/s$ est une loi normale $N(0,1)$
- Donc $P(m-\delta \leq N \leq m+\delta) = 0.95 \Leftrightarrow \delta/s = 2$
- ou encore **$P(m-2s \leq N \leq m+2s) = 0.95$**

Intervalle de confiance à $(1-\alpha)$

- **Soit $N(m, s)$**
  - **Trouver δ tel que**
  - **$P(m-\delta \leq N \leq m+\delta) = 1-\alpha$**

- $P(m-\delta \leq N \leq m+\delta) = P(-\delta \leq N-m \leq \delta)$
  $= P(-\delta/s \leq (N-m)/s \leq \delta/s) = P(-\varepsilon \leq (N-m)/s \leq \varepsilon) = 1-\alpha$

- $Z = (N-m)/s$ étant une loi normale $N(0,1)$, le ε associé au α se lit directement dans la table « de l'écart réduit »

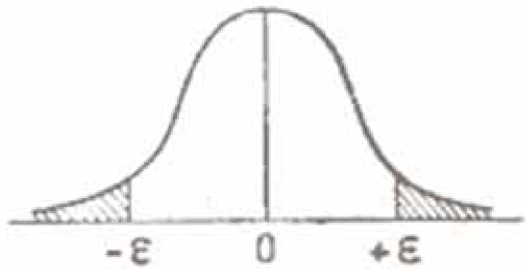
Exemple

- **Quel est l’intervalle de confiance à 99% du poids de naissance d’un nouveau-né, si le poids de naissance suit une loi normale N(3200, 400) ?**
- 0.99 = 1-0.01. Il faut donc trouver dans la « table de l’écart réduit » la valeur de ε associée à α = 0.01 (= 0.00 + 0.01). On lit ε = 2.576

TABLE I

Table de l’écart-réduit (loi normale) (*).

La table donne la probabilité α pour que l’écart-réduit égale ou dépasse, en valeur absolue, une valeur donnée ε, c’est-à-dire la probabilité extérieure à l’intervalle $(-\varepsilon, +\varepsilon)$.



α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	∞	2,576	2,326	2,170	2,054	1,960	1,881	1,812	1,751	1,695
0,10	1,645	1,598	1,555	1,514	1,476	1,440	1,405	1,372	1,341	1,311

Exemple

- Donc l'intervalle de confiance à 99% du poids de naissance d'un nouveau-né, si le poids de naissance suit une loi normale N(3200, 400) est : [3200 - 2.576 x 400 ; 3200 + 2.576 x 400] = [3200 - 1030 ; 3200 + 1030] = **[**2170 ; 4230]

Intervalle de confiance de la moyenne d'un échantillon

- Soient X une variable aléatoire définie sur une population, et n mesures $\{x_i, i=1,\ldots,n\}$ réalisées sur un échantillon extrait de cette population.

- Les paramètres μ et σ^2 inconnus de X seront estimés par

$$m = \sum x_i/n \text{ et } s^2=\sum(x_i-m)^2/(n-1)$$

- Comment définir un intervalle [a,b] tel que

$$P(a \leq \mu \leq b) = 1 - \alpha \text{ ?}$$

Moyenne empirique

- **Remarque** : m est une réalisation de la variable aléatoire “ **moyenne empirique dans des échantillons de taille n** ”

- Exemple : soient 8 échantillons de 200 P1, dont on **mesure** la taille moyenne. On obtient 8 valeurs : m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8. Les m_i n’ont aucune raison d’être toutes égales : ce sont des réalisations de la variable « moyenne empirique de la taille dans des échantillons d’effectif 200 ».

Moyenne empirique (suite)

- Supposons que l'on connaisse la moyenne μ et la variance σ^2 de la variable aléatoire « taille » dans la population de l'ensemble des P1 de France.
  - Que peut-on en déduire sur la distribution des m_i ?
- Réciproquement, si à partir d'un échantillon j'estime μ par m et σ par s, que puis-je dire sur la « fiabilité » de l'estimation de μ ?
  - Intuitivement, on se dit que plus σ est grand, moins « fiable » sera l'estimation de μ par m.

Moyenne empirique (fin)

- On démontre que la v. a. « moyenne empirique dans un échantillon de taille n » suit une loi :
  - de moyenne μ,
  - de variance $\sigma_e^2 = \sigma^2/n$
    - NB si n = 1, $\sigma_e^2 = \sigma^2$ (pas étonnant, un échantillon de taille 1, c'est un individu!)
    - NB si n tend vers l'infini, σ_e^2 tend vers 0 : (pas étonnant, on connaît parfaitement la moyenne si on a pour échantillon l'univers entier!).
- Si n >30, cette loi est normale, *(sinon, elle suit une loi « de Student », voir le cours de J. Labarère, mais c'est hors programme pour l'intervalle de confiance de la moyenne)*

Intervalle de confiance de la moyenne

- donc P($\mu-\varepsilon\sigma_e \leq m \leq \mu+\varepsilon\sigma_e$) = 1-$\alpha$, où ε et α sont lus dans la “ table de l’écart réduit ”.

- Or, *(puisqu’on connaît m, on veut un intervalle centré sur lui, permettant de prédire où est μ)*

$$P(\mu-\varepsilon\sigma_e \leq m \leq \mu+\varepsilon\sigma_e) = P(-\varepsilon\sigma_e \leq m-\mu \leq \varepsilon\sigma_e) =$$
$$P(-\varepsilon \leq (m-\mu)/\sigma_e \leq \varepsilon) = P(|m-\mu|/\sigma_e \leq \varepsilon) =$$
$$P(|\mu - m|/\sigma_e \leq \varepsilon) =$$
$$\mathbf{P(m-\varepsilon\sigma_e \leq \mu \leq m+\varepsilon\sigma_e) = 1-\alpha,}$$

- **L’intervalle de confiance à 1-α, de la moyenne est donc**

$$\mathbf{[m-\varepsilon\sigma_e\ ;\ m+\varepsilon\sigma_e]}$$

- **En pratique, il faut se souvenir que σ n'est pas connu. Nous devrons donc l'estimer par s.**
- **L'intervalle de confiance de la moyenne est donc**

$$\left\lfloor m - \varepsilon \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq m + \varepsilon \frac{s}{\sqrt{n}} \right\rfloor$$

Med@TICE
Université Joseph Fourier - Grenoble 1
ETUDES DE SANTÉ
Première Année

www.medatice-grenoble.fr

Mentions légales

Ce document a été réalisé par la Cellule TICE de la Faculté de Médecine et de Pharmacie de Grenoble
(Université Joseph Fourier – Grenoble 1)